# Lineare Algebra II
# 10. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 16.06.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

**Aufgabe 10.1.** (2+2) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y, z) = (y, z, 0)$.

(i) Berechnen Sie $f^\dagger$, wenn jedes $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet ist.
(ii) Berechnen Sie $f^\dagger$, wenn jedes $\mathbb{R}^3$ mit dem durch
$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$
definierten Skalarprodukt ausgestattet ist.

**Aufgabe 10.2.** (1+1+1+1) Sei $u$ ein Vektor ungleich Null in einem Skalarproduktraum $V$ über $\mathbb{R}$ (also einem euklidischen Vektorraum). Die *zu $u$ orthogonale Spiegelung* ist die lineare Abbildung $s_u : V \to V$ die durch
$$s_u(v) = v - 2\,\frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\,u$$
für $v \in V$ gegeben ist. Der Unterraum $\mathrm{Span}(u)^\perp$ von $V$ wird die *Spiegelungsebene* von $s_u$ genannt. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(i) Für $v \in V$, gilt $s_u(v) = -v \Leftrightarrow v \in \mathrm{Span}(u)$.
(ii) Für $v \in V$, gilt $s_u(v) = v \Leftrightarrow v \in \mathrm{Span}(u)^\perp$.
(iii) $\langle s_u(v), v'\rangle = \langle v, s_u(v')\rangle$ für $v, v' \in V$. (Also $s_u^\dagger = s_u$.)
(iv) $s_u^2 = \mathrm{Id}_V$. (Also $s_u^\dagger s_u = s_u s_u^\dagger = \mathrm{Id}_V$.)

**Aufgabe 10.3.** (1+2+1) Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen Skalarprodukträumen mit endlichdimensionalem $U$. Wir nehmen an, dass $f$ injektiv ist. Zeigen Sie Folgendes

(i) $f^\dagger f \in \mathrm{End}(U)$ ist injektiv und daher ein Isomorphismus.
(ii) $v - f(f^\dagger f)^{-1} f^\dagger(v) \in \mathrm{Bild}(f)^\perp$ für alle $v \in V$.
(iii) Die orthogonale Projektion von $V$ auf $\mathrm{Bild}(f)$ ist die Abbildung
$$V \to \mathrm{Bild}(f), \quad v \mapsto f(f^\dagger f)^{-1} f^\dagger(v).$$

Mehr...

**Aufgabe 10.4.** (2+1+1) Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale Skalarprodukträume über $\mathbb{R}$ (also euklidische Vektorräume). Erinnerung: der Dualraum von $V$ ist durch $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ gegeben. Für $v \in V$ definieren wir $\phi_{V,v} \in V^*$ durch $\phi_{V,v}(v') = \langle v', v \rangle$ für $v' \in V$.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi_V : V \to V^*$, $v \mapsto \phi_{V,v}$ ein Isomorphismus ist.
(ii) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Schreiben Sie die Formel für $f^* : W^* \to V^*$.
(iii) Zeigen Sie, dass wir ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f^\dagger"] \arrow[d, "\phi_W"'] & V \arrow[d, "\phi_V"'] \\ W^* \arrow[r, "f^*"] & V^* \end{tikzcd}$$

haben. d.h., zeigen Sie, dass $\phi_V f^\dagger = f^* \phi_W$.