Lineare Algebra II
11. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 23.06.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 11.1. (2+2) Zeigen Sie, (i) dass die Gruppe SO_2 abelsch ist und (ii) dass die Gruppe O_2 nicht abelsch ist.

Aufgabe 11.2. (1+1+1+1) Sei

$$L_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^{\mathrm{T}} = -A\}$$

der Vektorraum von $n \times n$ schiefsymmetrischen Matrizen über $\mathbb{R}$. Für $A, B \in L_n$ definieren wir $[A, B] = AB - BA$.

(i) Zeigen Sie, dass $[A, B] \in L_n$ für alle $A, B \in L_n$. Geben Sie ein Beispiel für Matrizen $A, B \in L_3$ mit $AB \notin L_3$.

(ii) Zeigen Sie die *Jacobi-Identität*: $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ für alle $A, B, C \in L_n$. (Da $[-, -]$ in jedem Argument linear ist und $[A, A] = 0$ für alle A, bedeutet dies, dass L_n eine *Lie-Algebra* mit der Verknüpfung $[-, -]$ ist.)

(iii) Für $n = 3$ gibt es einen Isomorphismus

$$f : \mathbb{R}^3 \to L_3, \quad f(v) = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 \\ v_1 & 0 & -v_3 \\ v_2 & v_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $f(v \times w) = [f(v), f(w)]$ für $v, w \in \mathbb{R}^3$, wobei $\times$ das Vektorprodukt ist.

(iv) Zeigen Sie, dass f orthogonal ist, wobei $\mathbb{R}^3$ das Standardskalarprodukt und L_3 das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(AB^{\mathrm{T}})$$

haben.

Mehr...

Aufgabe 11.3. (1+1+1+1) Sei V ein euklidischer Vektorraum (also ist der Körper $K = \mathbb{R}$). Der Abstand zwischen zwei Elementen $u, v \in V$ definiert eine Abbildung

$$d_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d_V(u, v) = \|u - v\|.$$

(i) Zeigen Sie, dass d_V eine *Metrik* ist, was bedeutet, dass (1) $d_V(u, v) \geq 0$ für alle $u, v \in V$, (2) $d_V(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$, (3) $d_V(u, v) = d_V(v, u)$ für alle $u, v \in V$ (Symmetrie) und (4) $d_V(u, w) \leq d_V(u, v) + d_V(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

(ii) Zeigen Sie unter Berücksichtigung von $d_V(u, 0)^2 + d_V(0, v)^2 - d_V(u, v)^2$, dass $\langle u, v\rangle$ aus der Funktion d_V wiederhergestellt werden kann.

(iii) Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen euklidischen Vektorräumen, die nicht unbedingt linear ist, wird als eine *Isometrie* bezeichnet, wenn $d_W(f(u), f(v)) = d_V(u, v)$ für alle $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass jede Isometrie f mit $f(0) = 0$ orthogonal (und daher, nach einem Lemma in §10.2, linear) ist.

(iv) Sei $a \in W$. Die *Translation* oder *Parallelverschiebung mit* a ist die Isometrie

$$t_a : W \to W, \quad t_a(w) = w + a.$$

Zeigen Sie, dass jede Isometrie $f : V \to W$ als Komposition einer orthogonalen Abbildung und einer Translation geschrieben werden kann.

Aufgabe 11.4. (1+2+1) Sei V ein Vektorraum über K. Erinnern Sie sich an LA I §5.1: Wenn $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in V ist, dann gibt es eine lineare Abbildung

$$\phi_B : K^n \to V, \quad \phi_B(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \ldots, \lambda_n v_n$$

und dass ϕ_B genau dann ein Isomorphismus ist, wenn B eine Basis von V ist.

(i) Angenommen, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ sind Basen von V. Erinnern Sie sich an LA I §5.2, dass die Basiswechselmatrix von der Basis B' nach der Basis B von V die Matrix P ist, so dass $L_P = (\phi_B)^{-1}\phi_{B'}$, wobei $L_P : K^n \to K^n$ durch $L_P(v) = Pv$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

für alle j, wobei $P = (p_{ij})$.

(ii) Nehmen wir nun an, dass V ein Skalarproduktraum ist und dass B eine Orthonormalbasis von V ist. Zeigen Sie, dass B' genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn P orthogonal/unitär ist (d.h. orthogonal im Fall $K = \mathbb{R}$ oder unitär im Fall $K = \mathbb{C}$).

(iii) Sei nun U ein r-dimensionaler Unterraum von V, $i_U : U \to V$ sei die Inklusion und $p_U : V \to U$ sei die orthogonale Projektion auf U. Sei A die Matrix von $i_U p_U$ bezüglich der Basis B. Zeigen Sie, dass es eine orthogonale/unitäre Matrix P gibt, so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei I_r die $r \times r$ Einheitsmatrix ist.