Lineare Algebra II
13. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 07.07.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Jede Aufgabe auf der Klausur ist 8 Punkte wert, also maximal 48 Punkte.

Allerdings werden die Noten auf der Probeklausur so skaliert, dass die Höchstpunktzahl 16 beträgt, genau wie bei den anderen Übungsblättern.

Lineare Algebra II

William Crawley-Boevey

Universität Bielefeld, SS 23

Probeklausur

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

1	2	3	4	5	6	Σ	Gesamt	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt, ein nicht programmierbarer Taschenrechner sowie Schreibutensilien. Bitte verwenden Sie weder Blei- noch Rotstift.

Veröffentlichung des Klausurergebnisses: Im Lernraum sobald die Korrektur beendet ist.

Falls Sie im SS 23 nicht in den Übungen zur Lineare Algebra II mindestens 50 Prozent der Gesamtpunktzahl erreicht haben oder nicht zweimal eine Aufgabe vorgerechnet haben, wird ihr Klausur nicht bewertet.

Aufgabe 1. (2+3+3 Punkte)

(i) Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Erklären Sie, was es bedeutet, dass eine Abbildung
$$V \times V \to K, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$
ein Skalarprodukt ist.

(ii) Zeigen Sie: die Abbildung $\langle v, w \rangle = 2v_1\overline{w_1} + 3v_2\overline{w_2}$ für $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ in $\mathbb{C}^2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$.

(iii) Beweisen Sie die folgende Umkehrung des Satzes des Pythagoras: wenn v und w Vektoren in einem euklidischen Vektorraum sind und $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$, dann sind v und w orthogonal.

Aufgabe 2. (4+4 Punkte)

Sei U ein Unterraum eines Skalarproduktraums V.

(i) Erklären Sie die Notation $U^\perp$ und zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Unterraum von V ist.

(ii) Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt, sei $u = (1, 1, 1, 0)$ und sei $U = \mathrm{Span}(u)$. Finden Sie eine orthonormale Basis von $U^\perp$.

Aufgabe 3. (4+2+2 Punkte)

Sei
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(i) Finden Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(ii) Finden Sie eine Matrix in Jordan-Normalform, die ähnlich zu A ist.

(iii) Finden Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 4. (3+2+3 Punkte)

Sei K ein Körper, sei $A \in M_n(K)$ und sei $p(X) \in K[X]$.

(i) Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist.

(ii) Definieren Sie, was es bedeutet, dass A trigonalisierbar ist. Geben Sie eine Bedingung für das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ an, damit A trigonalisierbar ist.

(iii) Sei $K = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von $p(A)$ die Form $p(\lambda)$ hat, für einen Eigenwert λ von A.

Aufgabe 5. (2+3+3 Punkte)

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Skalarprodukträumen.

(i) Definieren Sie die adjungierte Abbildung $f^\dagger$ zu f.

(ii) Zeigen Sie: Falls die Adjungierte $f^\dagger$ von f existiert, dann gilt $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Bild}(f^\dagger)^\perp$.

(iii) Finden Sie $f^\dagger$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die Standardskalarprodukte haben.

Aufgabe 6. (4+4 Punkte)

(i) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal ist. Zeigen Sie: wenn $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ normale Matrizen sind und B und $A^\dagger$ kommutieren, dann ist $A + B$ normal.

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

ist normal und hat das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = -X(X^2 + 2)$. Finden Sie eine unitäre Matrix P und eine diagonale Matrix D, so dass $D = P^{-1}AP$.