Es sei $(\mathbb{A}, V)$ ein affiner Raum der Dimension d über einem Körper K. Es seien $(P_1, \lambda_1), \ldots, (P_t, \lambda_t)$ gewichtete Punkte, so das $\sum_{i=1}^t \lambda_i \neq 0$.

Definition 0.1 *Man nennt P den Schwerpunkt der gewichteten Punkte (P_i, λ_i), wenn für jeden Punkt $O \in \mathbb{A}$ gilt:*

$$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_t)\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Der Schwerpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt.

Definition 0.2 *Wir nennen Punkte $R_0, R_1, \ldots, R_d \in \mathbb{A}$ einen Rahmen des d-dimensionalen affinen Raumes $\mathbb{A}$, wenn die Vektoren*

$$\overrightarrow{R_0R_1}, \overrightarrow{R_0R_1}, \ldots, \overrightarrow{R_0R_d}$$

eine Basis des Vektorraums V bilden.

Es sei $P \in \mathbb{A}$. Wir nennen $\underline{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_d) \in K^{d+1}$ baryzentrische Koordinaten von P bezüglich des Rahmens $R_0, \ldots, R_d$, wenn P der Schwerpunkt der gewichteten Punkte $(R_0, \mu_0), \ldots, (R_d, \mu_d)$ ist. Insbesondere muss dass $\sum_{\ell=0}^d \mu_\ell \neq 0$ gelten. Wir schreiben

$$\text{Gewicht}\, \underline{\mu} = \sum_{\ell=0}^{d} \mu_\ell.$$

Zwei verschiedene baryzentrische Koordinaten von P sind linear abhängig.

Wir sagen, dass $\underline{\mu}$ normierte baryzentrische Koordinaten von $P \in \mathbb{A}$ sind, wenn

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_d = 1.$$

Die normierten baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P existieren und sind eindeutig bestimmt.

Lemma 0.3 *Wir fixieren einen Rahmen von $\mathbb{A}$. Es seien $(P_1, \lambda_1), \ldots, (P_t, \lambda_t) \in \mathbb{A}$ gewichtete Punkte, so das $\sum_{i=1}^t \lambda_i \neq 1$. Es sei P ihr Schwerpunkt*

Es seien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_t \in K^{d+1}$ die normierten baryzentrischen Koordinaten dieser Punkte. Dann sind

$$\lambda_1 \tilde{P}_1 + \ldots + \lambda_t \tilde{P}_t$$

die normierten baryzentrischen Koordinaten von P.

Beweis: Wir fixieren einen Punkt O. Man findet die normierten baryzentrischen Koordinaten $\mu_{i,\ell}$ des Punktes P_i aus den Gleichungen:

$$\overrightarrow{OP}_i = \sum_{\ell=0}^{d} \mu_{i,\ell} \overrightarrow{OR}_\ell, \quad \sum_{\ell=0}^{d} \mu_{i,\ell} = 1.$$

Andererseits gilt nach Definition des Schwerpunktes

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i.$$

Wenn man die Gleichung oben einsetzt, so findet man

$$\overrightarrow{OP} = \textstyle\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \sum_{\ell=0}^{d} \mu_{i,\ell} \overrightarrow{OR}_\ell = \sum_{\ell=0}^{d} (\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_{i,\ell}) \overrightarrow{OR}_\ell$$

Das zeigt die Behauptung. $Q.E.D.$

Diese Formel für die baryzentrischen Koordinaten des Schwerpunktes kann man auch so interpretieren: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, t$. Dann finden wir baryzentrischen Koordinaten $\tilde{P}_i$, so dass Gewicht $\tilde{P}_i = \lambda_i$. Dann sind $\tilde{P}_1 + \ldots + \tilde{P}_t$ baryzentrischen Koordinaten des Schwerpunktes der (P_i, λ_i).

Es seien $P_1, \ldots, P_t \in \mathbb{A}$. Die affine Hülle $\mathcal{H}(P_1, \ldots, P_t)$ dieser Punkte ist der affine Unterraum

$$P_1 + \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_t}) \subset \mathbb{A}.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{L}$ die lineare Hülle von Vektoren in dem Vektorraum V. Die Hülle besteht aus allen Schwerpunkten von Mengen gewichteter Punkte der Form

$$(P_1, \lambda_1), (P_2, \lambda_2), \ldots, (P_t, \lambda_t),$$

wo $\lambda_1 + \ldots + \lambda_t \neq 0$.

Wenn wir einen Rahmen wählen können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken. Wir fixieren baryzentrischen Koordinaten $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_d \in K^{d+1}$ der Punkte $P_1, \ldots, P_d$. Es sei $P \in \mathbb{A}$ und es seien $\tilde{P} \in K^{d+1}$ baryzentrische Koordinaten von P.

Dann gilt $P \in \mathcal{H}(P_1, \ldots, P_t)$ genau dann, wenn $\tilde{P}$ eine Linearkombination der Vektoren $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_d$ im Vektorraum K^{d+1} ist.

Es sei $\det : V^d \to K$ eine Determinantenfunktion. Es seien $Q_0, \ldots, Q_d \in \mathbb{A}$ Punkte. Dann nennen wir

$$\mathrm{orVol}(Q_0, \ldots, Q_d) = \det(\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}, \overrightarrow{Q_0Q_d}).$$

Die Funktion orVol ist alternierend in ihren $d+1$ Argumenten Q_i.

Proposition 0.4 *Es sei $R_0, \ldots, R_d \in \mathbb{A}$ ein Rahmen. Es sei $P \in \mathbb{A}$. Dann sind*

$$\mathrm{orVol}(P, R_1, \ldots, R_d), \mathrm{orVol}(R_0, P, R_2, \ldots, R_d), \ldots, \mathrm{orVol}(R_0, R_1, \ldots, R_{d-1}, P)$$

die baryzentrischen Koordinaten von P.

Beweis: Es seien $(\mu_0, \ldots, \mu_d)$ die normierten baryzentrischen Koordinaten von P. Dann gilt:

$$\overrightarrow{R_0P} = \sum_{i=1}^{d} \mu_i \overrightarrow{R_0R_i}.$$

Aus der Cramerschen Regel erhält man:

$$\mu_i = \frac{\det(\overrightarrow{R_0R_1}, \ldots, \overrightarrow{R_0P}, \ldots, \overrightarrow{R_0R_d})}{\det(\overrightarrow{R_0R_1}, \ldots, \overrightarrow{R_0R_i}, \ldots, \overrightarrow{R_0R_d})}.$$

Hier entsteht der Zähler aus dem Nenner, indem man den Vektor $\overrightarrow{R_0R_i}$ im Argument von det durch $\overrightarrow{R_0P}$ ersetzt. Mit Hilfe des orientierten Volumens können wir schreiben

$$\mu_i = \frac{\mathrm{orVol}(R_0, \ldots, P, \ldots, R_d)}{\mathrm{orVol}(R_0, \ldots, R_i, \ldots, R_d)}.$$

Wir müssen noch μ_0 ausrechnen. Dazu vertauschen wir R_0 und R_1. Dann finden wir:

$$\mu_0 = \frac{\mathrm{orVol}(R_1, P, R_2, \ldots, R_d)}{\mathrm{orVol}(R_1, R_0, R_2, \ldots, R_d)}.$$

Daraus folgt die Behauptung. *Q.E.D.*