

Der Satz von Brianchon für den Kreis

Wir betrachten in einer Zeichenebene 6 Tangenten an einen Kreis, die wir in beliebiger Reihenfolge mit den Nummern 1-6 bezeichnen. Wir betrachten die folgenden Schnittpunkte der Tangenten:

$$A_1 = 1 \cap 6, A_2 = 3 \cap 4, B_1 = 2 \cap 3, B_2 = 5 \cap 6, C_1 = 1 \cap 2, C_2 = 4 \cap 5.$$

Satz 1 *Die Geraden A_1A_2 , B_1B_2 und C_1C_2 schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis: Für jede der Nummern i betrachten wir eine Gerade t_i im Raum mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die orthogonale Projektion der Geraden t_i auf die Zeichenebene ist die Tangente mit der Nummer i .
2. t_i schneidet die Zeichenebene unter dem Winkel 45° in dem Berührungspunkt der Tangente mit der Nummer i .

Um t_i eindeutig festzulegen, müssen wir noch vorschreiben, wo t_i unterhalb der Zeichenebene liegen soll und wo darüber. Wenn wir in der Zeichnung einen Punkt der Tangente i mit o (bzw. u) bezeichnet haben, so soll der entsprechende Punkt von t_i oberhalb (bzw. unterhalb) der Zeichenebene liegen. Es sei P ein Punkt von t_i und $P' \in i$ seine Projektion auf die Zeichenebene. Dann ist die Kotierung von P bis auf das Vorzeichen gleich dem Abstand von P' zum Berührungspunkt der Tangente mit der Nummer i .

Da Tangentenabschnitte der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind, folgt dass sich die Geraden t_3 und t_4 in einem Punkt treffen, der oberhalb von A_2 liegt. Genauso sieht man, dass über (oder unter) allen dick markierten Schnittpunkten von Tangenten in der Zeichnung Schnittpunkte der entsprechenden Geraden t_i liegen.

Wir betrachten die Ebenen $E = t_3t_6$, $F = t_1t_4$, $G = t_2t_5$. Das ist sinnvoll, da sich die beiden Geraden jeweils in einem Punkt schneiden. Wir bezeichnen mit S den Schnittpunkt der drei Ebenen.

Die Ebenen E und F schneiden sich in einer Geraden, deren Projektion die Gerade A_1A_2 ist. Also liegt die Projektion von S auf die Geraden A_1A_2 . Genauso ist die Projektion der Schnittgeraden von E und G die Gerade B_1B_2 . Folglich liegt die Projektion von S auch auf dieser Geraden. Schließlich ist die Projektion der Schnittgeraden von F und G die Gerade C_1C_2 . Daher

liegt die Projektion von S auf allen drei Geraden A_1A_2 , B_1B_2 und C_1C_2 in einem Punkt. Q.E.D.

Bemerkung: Der Schnittpunkt der Tangenten 2 und 4 ist nicht die Projektion eines Schnittpunktes von t_2 und t_4 , denn t_2 läuft dort oberhalb der Zeichenebene und t_4 ununterhalb der Zeichenebene. Auch andere nicht markierten Schnittpunkte sind nicht Projektionen von Schnittpunkten der entsprechenden Geraden g_i .

Übung: Man konstruiere die Kotierung des Punktes S .

Übung: Wie muss man in der folgenden Zeichnung (Brianchon1) die Geraden t_i wählen, um den Beweis des Satzes durchzuführen.