Rechenregeln für Differentiale

Definition 1 *Es sei f eine Funktion. Es sei x_0 ein Punkt, in dem f definiert ist. Das Differential $df_{|x_0}$ von f im Punkt x_0 ist die folgende Funktion*

$$df_{|x_0}(x) = f(x) - f(x_0).$$

Differentiale interessieren vorallem bis auf einen Fehler der Größenordnung $\mathbf{o}(|dx|)$. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(x) = x^n$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Dann gilt:

$$df_{|x_0}(x) = nx_0^{n-1}(dx)_{|x_0} + \mathbf{o}(|dx|) = nx^{n-1}(dx)_{|x_0} + \mathbf{o}(|dx|).$$

Diesen Sachverhalt schreibt man einfach in der Form

$$dx^n = nx^{n-1}dx. \tag{1}$$

1) Es sei $f(x) = a$ eine konstante Funktion. Dann gilt $df_{|x_0}(x) = 0$. Kurzform:

$$da = 0 \tag{2}$$

Es sei a eine Zahl und g eine Funktion. Dann gilt:

$$d(ag) = adg. \tag{3}$$

Ausgeschrieben bedeutet das $d(ag)_{|x_0}(x) = a(dg)_{|x_0}(x)$. Die letzte Gleichung gilt für alle x_0, wo die Funktionen definiert sind.

Es seien f und g zwei Funktionen. Dann gilt die Leibnizregel:

$$d(fg) = fdg + gdf + \mathbf{o}(|dx|) \tag{4}$$

Den Fehler rechts kann man vernachlässigen, indem man ihn nicht hinschreibt. Ausgeschrieben heisst diese Gleichung:

$$d(fg)_{|x_0}(x) = f(x_0)(dg_{|x_0}(x)) + g(x_0)(df_{|x_0}(x)) + \mathbf{o}_{x_0}(|dx|)$$

Es seien f und g zwei Funktionen. Dann betrachtet man die Funktion $F(x) = f(g(x))$. Dann gilt die Kettenregel (Kürzungsregel)

$$dF = \frac{dF}{dg} \cdot dg. \tag{5}$$

Es sei f eine Funktion, die in x_0 definiert ist. Wenn eine Zahl a existiert, so dass

$$\frac{df_{|x_0}(x)}{dx_{|x_0}(x)} = a + \mathbf{o}_{x_0}(1),$$

so nennt man a die Ableitung von f in x_0 und schreibt $f'(x_0) := a$. Ohne das Symbol d zu benutzen, kann man das schreiben:

$$f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + \mathbf{o}_{x_0}(|x - x_0|).$$

Wir schreiben dafür in Kurzform:

$$(\frac{df}{dx})_{|x_0} = a \quad \text{und auch} \quad \frac{df}{dx} = f'(x).$$

Beispiel: Nach (1) erhalten wir die Ableitung der Funktion x^n:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$