

Vorlesung Winter 2009/2010

Elementare Geometrie

1 Homothetien

Es sei $Z \in \mathbb{E}$ ein Punkt der Ebene. Es sei $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl. Die zentrale Homothetie mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor λ ist folgende Abbildung $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$. Für einen Punkt $A \in \mathbb{E}$ ist $h(A)$ der eindeutig bestimmte Punkt, für den

$$\overrightarrow{Zh(A)} = \lambda \overrightarrow{ZA}. \quad (1)$$

Wir bezeichnen die Abbildung h genauer mit $h(Z, \lambda)$.

Für zwei beliebige Punkte $A, B \in \mathbb{E}$ gilt dann

$$h(A)h(B) = \lambda \overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Das folgt aus (1) mit den Strahlensätzen.

Wenn $\lambda \neq 1$, so ist Z der einzige Fixpunkt der Abbildung h . Für jeden Punkt $A \neq Z$ liegt Z auf der Geraden $Ah(A)$.

Satz 1 *Eine zentrale Homothetie h bildet eine Strecke auf eine dazu parallele Strecke ab.*

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei parallele Strecken unterschiedlicher Länge. Dann gibt es genau eine zentrale Homothetie h , so dass

$$h(A) = A' \quad \text{und} \quad h(B) = B'.$$

Es sei C ein Punkt, der nicht auf der Geraden AB liegt. Dann konstruiert man $h(C)$ wie folgt. Man zieht die Parallele g zu AC durch den Punkt A' und die Parallele h zu BC durch den Punkt B' . Dann ist $h(C)$ der Schnittpunkt der Geraden g mit der Geraden h .

Definition 2 *Ein bijektive Abbildung $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ nennt man eine Homothetie, wenn h Geraden wieder auf Geraden abbildet und wenn für je zwei verschiedene Punkte A, B gilt, dass die Geraden AB und $h(A)h(B)$ parallel sind.*

Satz 3 Eine Homothetie h ist eine zentrale Homothetie oder eine Parallelverschiebung.

Es seien h und k Homothetien. Dann ist auch das Kompositum $h \circ k$ eine Homothetie.

Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ zwei parallele Strecken. Dann gibt es genau eine Homothetie h , so dass

$$h(A) = A' \quad \text{und} \quad h(B) = B'.$$

Man kann hier die gleiche Konstruktion von $h(C)$ anwenden, wie nach dem letzten Satz.

Da eine Homothetie h eine bijektive Abbildung ist, gibt es eine Umkehrabbildung $h^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, d.h.

$$h \circ h^{-1} = \text{id}_{\mathbb{E}}, \quad h^{-1} \circ h = \text{id}_{\mathbb{E}}.$$

Die Umkehrabbildung ist wieder eine Homothetie.

Eine Homothetie erhält Teilverhältnisse:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{h(C)h(A)}{h(C)h(B)}$$

Satz 4 (Trapezsatz) Es sei $ABCD$ ein Trapez, so dass $AB \parallel CD$. Es sei S der Schnittpunkt der beiden Seiten AD und BC und es sei T der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD .

Dann halbiert die Gerade ST die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. (Figur 29).

Beweis: Es sei ϕ die Homothetie, die die Strecke $\overline{AB}$ auf die Strecke $\overline{DC}$ abbildet. Dann ist S der Fixpunkt von ϕ . Da ϕ Teilverhältnisse erhält, wird der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ auf den Mittelpunkt N von $\overline{DC}$ abgebildet. Also liegen die Punkte M, N, S auf einer Geraden.

Es sei ψ die Homothetie, die die Strecke $\overline{AB}$ auf die Strecke $\overline{CD}$ abbildet. Dann ist T der Fixpunkt von ψ . Da ψ Teilverhältnisse erhält, wird der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ auf den Mittelpunkt N von $\overline{CD}$ abgebildet. Also liegen die Punkte M, N, T auf einer Geraden.

Also geht die Gerade MN durch die Punkte S und T . Q.E.D.

Satz 5 Es sei ABC ein Dreieck. Der Schnittpunkt der Höhen H , der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden (Eulergerade). Es gilt:

$$\overrightarrow{SM} = -(1/2)\overrightarrow{SH}.$$

(Figur Eulergerade).

Beweis: Es sei ABC ein Dreieck. Es seien $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ die Seiten des Dreiecks. Es sei A' der Mittelpunkt der Seiten a , es sei B' der Mittelpunkt der Seite b und es sei C' der Mittelpunkt der Seite c .

Wir wissen, dass es eine zentrale Homothetie κ gibt, so dass

$$\kappa(B) = B', \quad \kappa(C) = C'.$$

Man findet $\kappa(A)$ indem man die Parallele g zu BA durch den Punkt B' legt und die Parallele h zu CA durch den Punkt C' legt. Dann ist $\kappa(A)$ der Schnittpunkt der Geraden g und h . Mit dem Strahlensatz sieht man, dass $\kappa(A) = A'$.

Der Fixpunkt S von κ liegt auf allen 3 Geraden AA' , BB' und CC' . Also ist S der Schnittpunkt aller 3 Seitenhalbierenden des Dreiecks. Da nach dem Strahlensatz $\overrightarrow{A'B'} = -(1/2)\overrightarrow{AB}$ finden wir, dass

$$\kappa = h(S, -(1/2))$$

die zentrale Homothetie mit dem Fixpunkt S und dem Streckungsfaktor $-(1/2)$ ist. Insbesondere gilt also:

$$\overrightarrow{SA'} = -(1/2)\overrightarrow{SA}.$$

In dem gleichen Verhältnis teilt S auch die anderen Seitenhalbierenden.

Wir bezeichnen mit h_A , h_B , h_C die drei Höhen des Dreiecks und mit m_a , m_b und m_c die Mittelsenkrechten auf den Seiten a , b , c .

Die Geraden h_A und m_a sind parallel, da sie beide orthogonal zu a sind. Da $\kappa(h_A)$ parallel zu h_A ist und $A' \in \kappa(h_A)$, muss $\kappa(h_A)$ mit der Mittelsenkrechte m_a übereinstimmen. Entsprechendes gilt dann auch für die anderen Höhen:

$$\kappa(h_A) = m_a, \quad \kappa(h_B) = m_b, \quad \kappa(h_C) = m_c \quad (3)$$

Wir wissen, dass sich die Mittelsenkrechten m_a , m_b , m_c in einem Punkt M schneiden. Aus (3) sehen wir, dass sich die Höhen in dem Punkt $H = \kappa^{-1}(M)$ schneiden.

Also gilt $h(S, -(1/2))(H) = M$. Diese Gleichung zeigt, dass die Punkte S, H, M auf einer Geraden liegen. Q.E.D.

Bemerkung: Der Kreis durch die Punkte A', B' und C' nennt man der Eulerkreis $\mathcal{E}$ des Dreiecks ABC . Wenn $\mathcal{C}$ den Umkreis von ABC bezeichnet, so gilt $\kappa(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Der Durchmesser von $\mathcal{E}$ ist also halb so groß wie der von $\mathcal{C}$. Der Mittelpunkt des Eulerkreises ist der Punkt $N := \kappa(M)$. Man sieht leicht, dass er genau in der Mitte zwischen H und M liegt. Daraus folgt, dass

$$h(H, 1/2)(\mathcal{C}) = \mathcal{E}.$$

Es sei F der Fußpunkt der Höhe h_A . Es sei U der Schnittpunkt von h_A mit dem Umkreis $\mathcal{C}$. Man sieht aus der Figur “Eulerkreis2”, dass $|HF| = |HU|$. Daraus folgt, dass $h(H, 1/2)(U) = F$. Also liegt F auf dem Eulerkreis. Das Gleiche gilt für die Fußpunkte der anderen Höhen.

Satz 6 (*Pappus affin*) *Es seien P_1, P_2, P_3 drei verschiedene Punkte auf einer Geraden g . Es seien P'_1, P'_2, P'_3 drei verschiedene Punkte auf einer weiteren Geraden g' . Wir setzen voraus, dass die folgenden Geraden parallel sind*

$$P_1P'_3 \parallel P'_1P_3 \quad P_2P'_3 \parallel P'_2P_3.$$

Dann gilt: $P_1P'_2 \parallel P'_1P_2$.

Beweis: Da $\overline{P_1P'_3} \parallel \overline{P'_1P_3}$ gibt es eine Homothetie h , so dass $h(P_1) = P_3$ und $h(P'_3) = P'_1$. Da $\overline{P_3P'_2} \parallel \overline{P'_2P_3}$ gibt es eine Homothetie k , so dass $k(P_3) = P_2$ und $k(P'_2) = P'_3$.

Wir wollen jetzt annehmen, dass sich die beiden Geraden g und g' in einem Punkt S schneiden. Dann haben h und k beide den Fixpunkt S . Es gilt:

$$k \circ h = h \circ k. \quad (4)$$

In der Tat, wir können schreiben $h = h(S, \lambda)$ und $k = h(S, \mu)$ für geeignete Streckungsfaktoren λ und μ . Es gilt:

$$k \circ h = h(S, \mu) \circ h(S, \lambda) = h(S, \mu\lambda).$$

Genauso kann man die rechte Seite von (4) berechnen. Daraus folgt diese Gleichung.

Wir finden:

$$k \circ h(P_1) = k(P_3) = P_2, \quad k \circ h(P'_2) = h \circ k(P'_2) = h(P'_3) = P'_1.$$

Also bildet $k \circ h$ die Strecke $\overline{P_1 P'_2}$ auf die Strecke $\overline{P_2 P'_1}$ ab. Da $k \circ h$ eine Homothetie ist, müssen diese Strecken parallel sein. Damit ist der Fall bewiesen, wo sich die Geraden g und g' in einem Punkt S schneiden.

In dem Fall, wo g und g' parallel sind, sind k und h Translationen. Wir wissen, dass dann ebenfalls die Gleichung (4) gilt. Deshalb kommt man mit den gleichen Schlüssen zum Ziel, wie in dem schon behandelten Fall. *Q.E.D.*