

Die Inversion

Es sei $(\mathbb{A}, V)$ ein euklidischer Raum. Es sei $O \in \mathbb{A}$ und $k \in \mathbb{R}$, wo $k \neq 0$. Es sei $P \in \mathbb{A}$, so dass $P \neq O$. Wir definieren einen Punkt $P' \in \mathbb{A}$ durch die folgenden Bedingungen: Die Punkte P, P', O sind kollinear (liegen auf einer Geraden) und

$$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}) = k.$$

Die letzte Gleichung kann man alternativ so schreiben:

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{k}{|\overrightarrow{OP}|^2} \overrightarrow{OP}. \quad (1)$$

Die Zuordnung $P \mapsto P'$ definiert eine Bijektion

$$I(O, k) : \mathbb{A} \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{A} \setminus \{O\}, \quad I(O, k)(P) = P'.$$

so dass $I(O, k)^2 = \text{id}_{\mathbb{A} \setminus \{O\}}$.

Proposition 0.1 *Es sei $I = I(O, k)$. Dann gilt:*

$$|I(P)I(Q)| = \frac{|k||PQ|}{|OP||OQ|}.$$

Proposition 0.2 *Es sei $\ell \in \mathbb{R}$, wo $\ell \neq 0$. Dann gilt*

$$I(O, k) \circ I(O, \ell) = h(O, k/\ell)$$

Beweis: Es sei $P \in \mathbb{A}$. Es sei $I(O, \ell)(P) = P'$, $I(O, k)(P') = P''$. Dann gilt nach Definition

$$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}) = \ell, \quad (\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP''}) = k$$

Daraus folgt

$$\frac{\overrightarrow{OP''}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{k}{\ell}.$$

Proposition 0.3 *Es sei Ω ein Sphäre, so dass $\text{Potenz}_\Omega(O) = k$. Dann ist Ω invariant unter $I(O, k)$.*

Ist umgekehrt Ω invariant unter $I(O, k)$ (d.h. $I(O, k)(\Omega) = \Omega$), so gilt $\text{Potenz}_\Omega(O) = k$.

Es sei $P \in \mathbb{A} \setminus \{O\}$ ein Punkt und es sei $P' = I(O, k)(P)$. Wenn eine Sphäre Ω durch die Punkte P und P' geht, so ist sie bei $I(O, k)$ invariant.

Beweis: Es sei $P \in \Omega$. Man legt von O aus eine Sehne g durch P . Es sei $g \cap \Omega = \{P, P_1\}$. Wegen $\text{Potenz}_\Omega(O) = k$ gilt:

$$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP_1} = k.$$

Aber diese Gleichung besagt, dass $I(O, k)(P) = P_1 \in \Omega$.

Die Umkehrung ist offensichtlich.

Ist schließlich Ω eine Sphäre durch P und P' , so gilt offensichtlich $\text{Potenz}_\Omega(O) = k$. *Q.E.D.*

Wir betrachten die Inversion $I(O, k)$. Es sei $k > 0$. Wir setzen $k = r^2$. Dann nennen wir die Menge aller Punkte X , so dass

$$|OX|^2 = r^2$$

die Inversionssphäre $\mathcal{C}$. Diese Punkte X sind die Fixpunkte von $I(O, k)$.

Lemma 0.4 *Es sei Ω eine Sphäre. Dann gilt $\text{Potenz}_\Omega(O) = r^2$, gdw. Ω zur Inversionssphäre orthogonal ist.*

Beweis: Es sei M der Mittelpunkt von Ω und es sei t der Radius. Angenommen $\text{Potenz}_\Omega(O) = r^2$. Andererseits gilt nach Definition

$$\text{Potenz}_\Omega(O) = |OM|^2 - t^2.$$

Folglich gilt $r^2 + t^2 = |OM|^2$. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck OXM mit den Katheten $|OX| = r$ und $|MX| = t$. Also schneiden sich $\mathcal{C}$ und Ω in X und die beiden Radien zum Punkt X sind orthogonal.

Umgekehrt nehme man an, dass sich $\mathcal{C}$ und Ω in einem Punkt X orthogonal schneiden. Dann findet man die Gleichung $r^2 + t^2 = |OM|^2$. Das zeigt $\text{Potenz}_\Omega(O) = r^2$. *Q.E.D.*

Proposition 0.5 *Wir betrachten die Inversion $I(O, k)$. Es sei Ω eine Sphäre, die nicht durch O geht. Dann ist $I(O, k)(\Omega)$ eine Sphäre.*

Beweis: Es sei $\ell = \text{Potenz}_\Omega(O)$. Dann gilt nach Proposition 0.3, dass $I(O, \ell)(\Omega) = \Omega$. Nach Proposition 0.2 gilt

$$I(O, k) = h(O, k/\ell)I(O, \ell).$$

Also ist $I(O, k)(\Omega) = h(O, k/\ell)(\Omega)$ eine Sphäre, denn die Homothetie $h(O, k/\ell)$ bildet Sphären auf Sphären ab. *Q.E.D.*

Es seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei verschiedene Kreise. Es sei $h(O, \lambda)$ eine zentrale Homothetie, die den Kreis $\mathcal{K}$ auf den Kreis $\mathcal{K}'$ abbildet.

$$h(O, \lambda)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'.$$

Es sei p die Potenz des Punktes O bezüglich des Kreises $\mathcal{K}$. Dann gilt für die Inversion $I(O, p)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Nach der Gleichung

$$h(O, \lambda)I(O, p) = I(O, \lambda p)$$

finden wir

$$I(O, \lambda p)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'.$$

Also ist $\mathcal{K}'$ das Bild von $\mathcal{K}$ bei einer Inversion mit dem Zentrum O .

Diesen Schluss kann man auch umkehren. Es sei $I(O, q)$ eine Inversion, so dass $I(O, q)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$. Es sei p die Potenz von O bezüglich des Kreises $\mathcal{K}$. Dann kann p nicht null sein. In der Tat, sonst läge O auf $\mathcal{K}$ und dann wäre $I(O, k)(\mathcal{K})$ eine Gerade. Es sei $q = \mu p$. Dann gilt

$$h(O, \mu)(\mathcal{K}) = h(O, \mu) \circ I(O, p)(\mathcal{K}) = I(O, q)(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'.$$

Also ist $h = h(O, \mu)$ eine zentrale Homothetie mit dem Fixpunkt O , die $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}'$ abbildet. Da die beiden Kreise verschieden sind muss $\mu \neq 1$ gelten. Der Punkt O ist also durch h eindeutig bestimmt. Da es höchstens zwei zentrale Homothetien gibt die $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}'$ abbilden, gibt es auch höchstens zwei Inversionen, die $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}'$ abbilden.

Es seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei Kreise. Es sei $\varkappa = h(O, \lambda)$ eine zentrale Homothetie mit dem Zentrum O , so dass $\varkappa(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$. Es sei $\iota = I(O, k)$ die Inversion mit dem Zentrum O , so dass $\iota(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$.

Es sei l eine Gerade durch O , die $\mathcal{K}$ in zwei verschiedenen Punkten A und B schneidet. Es sei

$$\iota(A) = A', \quad \text{und} \quad \iota(B) = B'.$$

Dann gilt:

$$\varkappa(A) = B', \quad \text{und} \quad \varkappa(B) = A'. \quad (2)$$

In der Tat, angenommen es wäre $\varkappa(A) = A'$. Dann ist A ein Fixpunkt der Inversion $\rho := \iota \circ \varkappa$. Also muss die letzte Inversion einen Inversionskreis $\mathcal{C}$ haben und A muss auf diesem Inversionskreis liegen. Es gilt $\rho(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ und deshalb ist $\mathcal{K}$ orthogonal zu $\mathcal{C}$. Damit ist $l = OA$ eine Tangente an $\mathcal{K}$. Aber

wir haben vorausgesetzt, dass l den Kreis $\mathcal{K}$ in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Also ist (2) bewiesen.

Das Differential

Es seien $(\mathbb{A}, V)$ und $(\mathbb{B}, W)$ affine Räume. Es sei $U \subset \mathbb{A}$ eine offenen Teilmenge. Es sei $g : U \rightarrow \mathbb{B}$ eine Funktion. Wenn wir Vektorisierungen $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}^m$ wählen, so können wir g als eine Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^n$ auffassen und wissen dann was differenzierbar ist. In der Geometrie hat man meistens Funktionen die unendlich oft differenzierbar sind. Man sagt dazu, dass g eine C^∞ -Funktion ist. Die Definition von differenzierbar sagt:

Proposition 0.6 *Die Funktion g sei differenzierbar in einem Punkt $X \in U$. Dann existiert eine affine Abbildung $(f, \phi) : (\mathbb{A}, V) \rightarrow (\mathbb{B}, W)$ so dass für alle $t \in V$, mit $|t|$ hinreichend klein*

$$g(X + t) = f(X + t) + \mathbf{o}(|t|).$$

Man definiert

$$dg_X = \phi$$

und nennt das das Differential von g im Punkt X .

Wir betrachten den affinen Raum $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir betrachten offene Intervalle $U \subset \mathbb{R}$, so dass $0 \in U$.

Definition 0.7 *Eine Kurve γ in einem affinen Raum (B, W) ist ein C^∞ -Funktion $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $0 \in U \subset \mathbb{R}$.*

Es sei $P = \gamma(0)$. Den Vektor $d\gamma_0(t)$, wo $t = 1 \in \mathbb{R}$ nennen wir den Tangentialvektor $\mathbf{t}_\gamma$ der Kurve im Punkt P .