LA-Klausur am 16.2.2017

1) Man betrachte die folgende Matrix aus $M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Vektor ist ein Eigenvektor von A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Man finde eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts, die aus Eigenvektoren der Matrix A besteht.

2) Man finde eine Basis für den Vektorraum der Relationen zwischen den folgenden Vektoren:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ s_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ s_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten K-Vektorraums. Es sei n eine natürliche Zahl, so dass

$$\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}.$$

Man beweise, dass $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^n = \{0\}$.

4) Es sei $A \in M(n \times n, K)$. Die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonale von A nennt man die Spur $\operatorname{Tr} A$ von A. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ beliebige Vektoren. Man beweise die Formel:

$$\det(Av_1, v_2, \ldots, v_n) + \det(v_1, Av_2, v_3, \ldots, v_n) + \ldots + \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, Av_n) = (\operatorname{Tr} A) \det(v_1, \ldots, v_n)$$

5) Man finde die Sylvestersche Normalform der folgenden quadratischen Form auf $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_3^2 + 14x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

6) Es sei $\phi \in \mathbb{R}$. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Man betrachte diese Matrix als eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Man finde die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $e^{\pm \mathbf{i}\phi}$. Man finde eine Matrix $C \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, die invertierbar ist und so dass

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{i}\phi} \end{pmatrix}.$$

7) Es seien $u, v, w \in K^3$. Man beweise die Formel

$$u \times (v \times w) = (u, w)v - (u, v)w.$$

Alle Lösungen müssen begründet werden!