Musterlösung der Aufgbe 2

2) Man finde eine Basis für den Vektorraum der Relationen zwischen den folgenden Vektoren:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ s_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ s_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eine Relation ist ein Vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

so dass im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 + x_4 s_4 + x_5 s_5 = 0.$$

Die Menge Relationen $\underline{x}$ ist ein Untervektorraum $L \subset \mathbb{R}^5$. Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim L + \dim \mathcal{L}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = 5.$$

Wir betrachten die Matrix:

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Wenn man auf diese Matrix Zeilenoperationen anwendet, so ändern sich die Relationen zwischen den Spalten nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen der letzten Matrix sind linear unabhängig und daher hat die letzte Matrix den Rang 2. Also gilt $\dim L = 3$ Wir müssen die

Relationen $\underline{x}$ zwischen den Spalten der letzten Matrix finden. Das heißt $\underline{x} \in L$, gdw.

$$\begin{array}{rrrrrl} 1x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +1x_5 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 0. \end{array} \tag{1}$$

Man setzt in diesem Gleichungssystem $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Dann erhält man

$$\begin{array}{rrrl} 1x_1 & +3x_2 & +2 & = 0 \\ & 3x_2 & +1 & = 0 \end{array}$$

Man findet $x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_1 = -1$. Also ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Relation. Als nächstes setzt man in dem Gleichungssystem (1):

$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$$

Dann findet man die Relation:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Schließlich setzt man in dem Gleichungssystem (1):

$$x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$$

Dann findet man die Relation:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die drei Vektoren unter (2), (3), (4) sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis des 3-dimensionalen Vektorraums L der Relationen.