Aufgabe 3 vom 26.1.2017

3) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten K-Vektorraums. Es sei n eine natürliche Zahl, so dass

$$\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}.$$

Man beweise, dass $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^n = \{0\}$.

Lösung: Man betrachtet die lineare Abbildung

$$\breve{f} : \operatorname{Im} f^n \to \operatorname{Im} f^{n+1}, \tag{1}$$

die durch $\breve{f}(v) := f(v)$ für $v \in \operatorname{Im} f^n$ definiert ist.

Wir zeigen, daß $\breve{f}$ surjektiv ist: Es sei $w \in \operatorname{Im} f^{n+1}$. Dann gilt nach Definition $w = f^{n+1}(u)$ für ein $u \in V$. Wir setzen $v := f^n(u) \in \operatorname{Im} f^n$. Dann gilt

$$w = \breve{f}(v).$$

Also ist die Abbildung (1) surjektiv. Aus der Dimensionformel erhält man daher $\dim \operatorname{Ker} \breve{f} = 0$. Schließlich beweist man, dass

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Ker} \breve{f} = 0.$$