Aufgabe 5 vom 26.1.2017

5) Man finde die Sylvestersche Normalform der folgenden quadratischen Form auf $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_3^2 + 14x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

Lösung: Es sei

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dann kann man schreiben

$$Q(x_1, x_2, x_3) = {}^t\underline{x} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 7 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \underline{x}. \tag{1}$$

Wir bezeichnen die letzte symmetrische 3×3-Matrix mit B. Um die Sylvestersche Normalform von B zu finden, kann man simultane Zeilen- und Spaltenoperationen anwenden, da sie die Sylvestersche Normalform nicht verändern. Man addiert $(-1/2) \cdot (3.Zeile)$ zur $1.Zeile$ und dann, in der Matrix die man erhält, $(-1/2) \cdot (3.Spalte)$ zur $1.Spalte$:

$$\begin{pmatrix} 2,5 & 7 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2,5 & 7 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Die letzte symmetrische Matrix hat dann die gleiche Sylversternormalform wie Q. In dieser letzten Matrix Man addiert $(-7/12) \cdot (2.Zeile)$ zur $1.Zeile$ und dann $(-7/12) \cdot (2.Spalte)$ zur $1.Spalte$:

$$\begin{pmatrix} -(19/12) & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -(19/12) & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Die Sylverstersche Normalform der letzten Matrix ist offenbar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also kann man Q in einem geeigneten Koordinatensystem schreiben:

$$Q(x_1', x_2', x_3') = (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2$$

2.Lösung: Wenn man Q auf den Unterraum $U = \{\underline{x} \mid x_1 = 0\}$ einschränkt, so ist $Q_{|U} = 12x_2^2 + 10x_3^2$. Also ist $Q_{|U}$ positiv definit.

Die Matrix B definiert eine symmetrische Bilinearform β auf $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U bezüglich dieser Form ist 1-dimensional. In der Tat, das folgt aus Skript Satz 91 angewendet auf die durch B definierte Bilinearform

$$U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Eingeschränkt auf $U^\perp$ ist β positiv, negativ, oder 0. Wir wählen eine Basis von U und von $U^\perp$ und erhalten zusammen eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Es sei B' die Matrix von β in dieser Basis. Dann hat $\det B'$ das gleiche Vorzeichen wie $\det B$. Man rechnet $\det B < 0$ aus. Also gilt $\det B' < 0$. Andererseits gilt

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp.$$

Daher hat man

$$\det B' = \det(B'|U) \cdot \det(B'|U^\perp).$$

Da β auf U positiv definit ist, ist $\det(B'|U^\perp) < 0$, d.h Einschränkung von β auf $U^\perp$ hat die Sylvestersche Normalform (-1). Die Einschränkung von β auf U die Sylvestersche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn sie ist positiv definit.

Zusammen ergibt sich für die Sylverstersche Normalform von β

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das ist dann auch die Sylvestersche Normalform von Q.