Klausur Geometrie am 3.2.2015

1) Wir betrachten den affinen Raum $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, so dass wir vom Abstand $|AB|$ von zwei Punkten A und B sprechen können. Es seien $(P_1, \lambda_1), \ldots, (P_t, \lambda_t)$ gewichtete Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1 + \ldots + \lambda_t = \lambda \neq 0$. Dann definiert man die Funktion:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i |XP_i|^2, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Es sei S der Schwerpunkt von $(P_1, \lambda_1), \ldots, (P_t, \lambda_t)$. Man beweise die Identität:

$$F(X) = F(S) + \lambda |XS|^2.$$

2) Es seien PQR und $P'Q'R'$ zwei Dreicke in der Ebene, die in Perspektive von einem Punkt S aus sind.

Es sei $PQ \parallel P'Q'$. Die folgenden Schnittpunkte mögen existieren:

$$Y = QR \cap Q'R', \quad Z = RP \cap R'P'.$$

Man beweise, dass $YZ \parallel PQ$.

(Man gebe einen Beweis mit baryzentrischen Koordinaten **oder** mit darstellender Geometrie.)

3) Man definiere die Inversionsabbildung $I = I(O, k)$, wobei O ein Punkt der euklidischen Ebene $\mathbb{E}$ und $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Es sei C ein Kreis von $\mathbb{E}$, der nicht durch O geht.

Man beweise, dass $I(C) = C$ genau dann gilt, wenn die Potenz des Punktes O bezüglich des Kreises C gleich k ist.

4) Es sei K ein Kreis und es seien A und B zwei Punkte außerhalb von K. Man zeichne eine Kreis der durch A und B geht und der K tangential berührt.

5) Es sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(K^2)$ die projektive Gerade über einem Körper K. Es seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$ vier verschiedene Punkte.

Man beweise, dass für die Doppelverhältnisse gilt:

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P_2, P_1, P_3, P_4]^{-1}$$

6) Wir bezeichen mit $h = h(I, \lambda)$ die Homothetie mit dem Fixpunkt I, und so dass $\overrightarrow{h(A)h(B)} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Gegeben seien 3 Kreise $\mathcal{C}_i$, wo $i = 1, 2, 3$ mit unterschiedlichen Radien. Es gibt eine Homothetie $h(I_1, \lambda_1)$, die $\mathcal{C}_2$ auf $\mathcal{C}_3$ abbildet und so dass $\lambda_1 > 0$. Es gibt eine Homothetie $h(J_2, \mu_2)$, die $\mathcal{C}_3$ auf $\mathcal{C}_1$ abbildet und so dass $\mu_2 < 0$ und es gibt eine Homothetie $h(J_3, \mu_3)$ die $\mathcal{C}_1$ auf $\mathcal{C}_2$ abbildet und so dass $\mu_3 < 0$.

Man beweise, dass die Punkte I_1, J_2, J_3 auf einer Geraden liegen.

7) Es sei $PQRS$ ein Viereck, dessen Seiten einen Kreis in den Punkten A, B, C, D berühren.

Man beweise, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $PQRS$ mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ übereinstimmt. (Man benutze die Methode der stereographischen Projektion).