

Probeklausur Geometrie am 22.1.2015

1) Es sei ABC ein Dreieck in der Ebene. Was sind die baryzentrische Koordinaten des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden dieses Dreiecks bezüglich des Rahmens ABC ? (Die Formel soll nur die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks benutzen.)

2) Es sei $(\mathbb{A}, V)$ ein affiner Raum. Es sei d die Dimension des Vektorraums V . Es seien $R_0, \dots, R_d$ Punkte von $\mathbb{A}$, so dass die Vektoren $\overrightarrow{R_0 R_i}$ eine Basis von V bilden. (Also ein Rahmen von $\mathbb{A}$.) Es sei $O \in \mathbb{A}$ ein Punkt.

Es seien $\rho_0, \dots, \rho_d \in K$, so dass folgenden Gleichungen gelten:

$$\sum_{i=0}^d \rho_i \overrightarrow{OR_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^d \rho_i = 0.$$

Man beweise, dass $\rho_i = 0$.

3) Es sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Wir bezeichnen mit I die Inversion an K . Was ist die Definition von I ?

Es sei C ein Punkt. Man konstruiere $I(C)$. (Abbildung)

4) Es sei K_1 ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 und K_2 ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_2 . Es sei $P \in K_1$ ein Punkt.

Auf den beiden Abbildungen wird ein Kreis konstruiert, der zu beiden Kreisen K_1 und K_2 tangential ist, und dessen Berührungspunkt mit K_1 gleich P ist.

Man beweise die Richtigkeit dieser Konstruktion.

5) Es sei $k > 0$, und $k \neq 1$. Wir wissen, dass die Menge aller Punkte X , so dass

$$|XA|/|XB| = k,$$

ein Kreis ist. Es sei ein Punkt X dieses Kreises vorgegeben.

Man konstruiere den Kreis.

6) Es sei V ein Vektorraum der Dimension $d + 1$. Es seien $P_0, \dots, P_{d+1}$ $d + 2$ Punkte in $\mathbb{P}(V)$. Das sind eindimensionale Untervektorräume von V . Wir sagen, dass in allgemeiner Lage sind, wenn die lineare Hülle von jeweils d dieser Untervektorräume gleich V ist.

Es seien $Q_0, \dots, Q_{d+1}$ weitere Punkte in allgemeiner Lage. Man beweise, dass es genau eine projektive Abbildung $\alpha : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ gibt, so dass $\alpha(P_i) = Q_i$.

7) Es sei $PQRS$ ein Viereck, dessen Seiten einen Kreis in den Punkten A, B, C, D berühren.

Man beweise, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $PQRS$ mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ übereinstimmt. (Man benutze die Methode der stereographischen Projektion).