LA-Klausur am 25.7.2013

1) Man betrachte den Endomorphimus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$, dessen Matrix in der Standardbasis wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 13 & -4 & -1 \\ 4 & 23 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte dieses Endomorphismus und die Dimension der Haupträume.

2) Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum mit einer nichtausgarteten alternierenden Bilinearform $B : V \times V \to K$.

Man beweise, dass es einen Unterraum $W \subset V$ gibt, so dass $B(w_1, w_2) = 0$ für alle $w_1, w_2 \in W$ und so dass $2 \dim W = \dim V$.

3) Es sei V ein orientierter euklidischer Vektrorraum der Dimension 3. Wie ist das Vektorprodukt $v_1 \times v_2$ zweier Vektoren $v_1, v_2 \in V$ definiert?

Es sei $\phi : V \to V$ eine Drehung. Man beweise, dass

$$\phi(v_1) \times \phi(v_2) = \phi(v_1 \times v_2),$$

für alle Vektoren $v_1, v_2 \in V$.

4) Es sei $A \in M(n \times n, K)$. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ beliebige Vektoren. Man beweise die Formel:

$$\det(Av_1, v_2, \ldots, v_n) + \det(v_1, Av_2, v_3, \ldots, v_n) + \ldots + \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, Av_n) = (\operatorname{Spur} A) \det(v_1, \ldots, v_n).$$

$\det \in \operatorname{Alt}^n(K^n)$ bezeichnet eine beliebige Determinantenfunktion.

5) Man betrachte das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 9x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Die Menge L aller Lösungen $\underline{x}$ dieser Gleichungen ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^6$.

Man berechne eine Basis des Vektorraums L.

6) Wir betrachten auf dem Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform:

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} \begin{pmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 13 \end{pmatrix} \underline{y}, \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Man finde eine orthonormale Basis des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, in der die Gramsche Matrix von B Diagonalform hat.

7) Wir definieren auf dem Vektorraum K^3 die folgenden alternierenden Bilinearformen $\alpha_i : K^3 \times K^3 \to K$ für $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\underline{x}, \underline{y}) &= \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3(\underline{x}, \underline{y}) &= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier ist $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in K^3, \underline{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3) \in K^3$.

Man beweise, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Alt}^2(K^3)$ aller alternierenden Bilinearformen auf K^3 ist.