

Kurvenintegrale

Definition 0.1 *Es sei $C \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Es sei $x \in C$. Eine eindimensionale Parametrisierung von C in x ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung*

$$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eines offenen Intervalls $(a, b) \subset \mathbb{R}$, mit $a < b$, so dass $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ und so dass folgende Eigenschaft erfüllt ist. Es existiert eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^3$ des Punktes X existiert, so dass $\gamma(t) \in C \cap W$ für alle $t \in (a, b)$ und

$$\gamma : (a, b) \rightarrow C \cap W$$

ist eine Bijektion.

Wenn C in jedem Punkt $x \in C$ eine Parametrisierung besitzt, so heißt C eine glatte Kurve.

Wir können den Begriff Parametrisierung folgendermaßen verallgemeinern. Eine injektive Abbildung

$$\gamma : (a, b) \rightarrow C \tag{1}$$

heißt eine Parametrisierung, wenn γ in jedem Punkt $\gamma(t)$, $t \in (a, b)$ eine Parametrisierung im Sinne der Definition ist, sobald man γ auf ein kleines Intervall in (a, b) einschränkt, das $\gamma(t)$ enthält. Ein typisches Beispiel ist die Bogenlänge: Wir legen eine Durchlaufrichtung (= Orientierung) von C fest. Man fixiert einen Punkt $P \in C$. Es sei $Q \in C$ und es sei $s(Q)$ die Bogenlänge von P nach Q . Hierbei nimmt man s negativ, wenn wir von P nach Q entgegengesetzt der Durchlaufrichtung laufen. Im allgemeinen bekommen wir so eine mehrdeutige Funktion

$$C \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q \mapsto s(Q),$$

die aber eindeutig ist, wenn die Kurve nicht geschlossen ist.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Wir bezeichnen die Koordinaten auf \mathbb{R}^3 mit (x, y, z) . Eine Differentialform auf U besteht aus 3 stetigen Funktionen $p, q, r : U \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bezeichnen eine Differentialform mit dem folgenden Symbol:

$$pdx + qdy + rdz.$$

Es sei C eine glatte Kurve. Wir nehmen an, dass eine Durchlaufrichtung von C festgelegt ist. Es seien P und Q zwei Punkte von C . Es sei

$$\gamma : (a, b) \rightarrow C \quad (2)$$

eine Parametrisierung die die Durchlaufrichtung respektiert. Es seien $t_0, t_1 \in (a, b)$, so dass $t_0 < t_1$. Es sei $P = \gamma(t_0)$, $Q = \gamma(t_1)$.

Es seien $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ die Koordinaten von $\gamma(t)$. Dann definieren wir

$$\int_P^Q p dx + q dy + r dz = \int_a^b (p(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + q(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) + r(\gamma(t))\dot{\gamma}_3(t)) dt.$$

Wir schreiben zur Abkürzung $\omega = p dx + q dy + r dz$.

Dieses Integral hängt nur von der Kurve C und den Punkten P, Q aber nicht von der Parametrisierung γ ab. Um das einzusehen zeigt man:

Lemma 0.2 *Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\tau(s)) \tau'(s) ds.$$

Das ist immer noch richtig, wenn τ stückweis stetig ist, d.h. es gibt eine Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele abgeschlossene Teilintervalle, so dass die Einschränkung von τ auf jedes Teilintervall stetig differenzierbar ist.

Eine einfache Folge von Lemma 0.2 ist, dass die Bogenlänge nicht von der Parametrisierung abhängt.

Proposition 0.3 *Es sei $\gamma : (a, b) \rightarrow C$ eine Parametrisierung. Es sei $\delta : [c, d] \rightarrow C$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass das Bild von δ ganz im Bild von γ liegt.*

Dann gilt

$$\int_P^Q \omega = \int_P^Q \omega$$

Beweis: Da γ injektiv ist gibt es also eine Abbildung $\tau : [c, d] \rightarrow (a, b)$, so dass $\delta = \gamma \circ \tau$.

Die Abbildung τ ist dann stetig differenzierbar. Deshalb gilt nach dem Lemma die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\tau(c)}^{\tau(d)} (p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t) + r(\gamma(t))\gamma_3'(t)) dt &= \\ \int_c^d (p(\gamma(\tau(s))\gamma_1'(\tau(s))\tau'(s) + q(\gamma(\tau(s))\gamma_2'(\tau(s))\tau'(s) + r(\gamma(\tau(s))\gamma_3'(\tau(s))\tau'(s))) ds &= \\ \int_c^d (p(\delta(s))\delta_1'(s) + q(\delta(s))\delta_2'(s) + r(\delta(s))\delta_3'(s)) ds \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.