

LA-Probeklausur am 26.1.2017

1) Man betrachte die Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad s_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Man finde alle Teilmengen von $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, die eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{L}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ sind.

2) Es V ein K -Vektorraum der Dimension n . Es sei $U \subset V$ ein Unterraum der Dimension $d < n$.

Man beweise, dass es $n - d$ Unterräume $H_1, \dots, H_{n-d} \subset V$ gibt, so dass $\dim_K H_i = n - 1$ für $i \in [1, n - d]$ und so dass

$$U = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n-d}.$$

3) Man betrachte die folgende Matrix aus $M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -24 \\ 0 & 2 & 0 \\ -24 & 0 & -7 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Man finde eine Basis aus Eigenvektoren aus $\mathbb{R}^3$ für diese Matrix, so dass die Basis bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ orthogonal ist.

4) Man berechne den Abstand der folgenden beiden affinen Unterräume A_1 und A_2 des $\mathbb{R}^4$:

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

5) Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 1 \\ -1 & -4 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 6 \\ -1 & -11 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Was sind die Eigenwerte dieser Matrix und wie groß ist die Dimension der Haupträume? (Man benutze, dass $\mathbf{e}_1$ in einem invarianten Unterraum liegt.)

6) Es seien $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ Vektoren. Man beweise die Relation:

$$\det(\underline{u}, \underline{v})\underline{w} + \det(\underline{v}, \underline{w})\underline{u} + \det(\underline{w}, \underline{u})\underline{v} = 0$$

7) Es sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten K -Vektorraums. Es sei $m \geq 1$, so dass $\text{Ker } f^m = \text{Ker } f^{m+1}$.
Man beweise, dass $\text{Im } f^m = \text{Im } f^{m+1}$.

Alle Lösungen müssen begründet werden!