

Bielefeld, den 18.1.12

Probeklausur Mathematik für Chemiker

1) Ein Skatenspiel wird gut gemischt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Stapel von 32 Karten die 4 Asse genau übereinanderliegen?

2) Was bedeutet das Symbol

$$x^n = \mathbf{o}(e^x), \quad (1)$$

wobei sich x dem Wert $+\infty$ nähert?

Unter der Voraussetzung, dass (1) bekannt ist, beweise man, dass für eine beliebige Zahl $a > 1$ und eine beliebige natürliche Zahl n :

$$x^n = \mathbf{o}(a^x).$$

3) Man gebe ein möglichst großes Intervall $(-r, +r)$ an, in welchem die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^3.$$

konvergiert. Was ist die Ableitung dieser Reihe?

4) Es sei K eine Kugel vom Radius r . Es sei h eine Zahl, so dass $0 < h < r$. Eine Ebene E habe zum Mittelpunkt der Kugel den Abstand h . Sie schneidet die Kugel in zwei Teile. Welches Volumen hat der kleinere Teil der Kugel?

5) Es sei $h(x)$ eine differenzierbare Funktion in dem Intervall $[a, b]$, die dort nur positive Werte annimmt. Es sei r eine Zahl. Man finde eine Formel für das Integral

$$\int_a^b (h(x))^r \cdot h'(x) dx.$$

Man berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

6) Wie groß ist der Abstand des Punktes mit den Koordinaten $(6, 2)$ in der Ebene zu der Geraden, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$x - 2y + 3 = 0?$$

7) Berechnen Sie das Skalarprodukt folgender Vektoren in der Ebene

$$v = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix}.$$

Erklären Sie daraus die Formel:

$$\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi.$$

Alle Lösungen müssen begründet werden