Bielefeld, den 14.Juli 2016

Probeklausur, Lineare Algebra I

1) Es sei V ein K-Vektorraum. Es sei v_1, v_2, v_3 eine Basis von V. Man beweise, dass die Folge von Elementen

$$v_1 + 2v_2 + v_3,\ v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 + v_2$$

von V ebenfalls ein Basis von V ist.

2) Es sei V ein K-Vektorraum. Es seien $U \subset V$ und $W \subset V$ Untervektorräume, so dass $U \cap W = \{0\}$. Es seien $u_1, \dots u_m \in U$ linear unabhängig und $w_1, \dots, w_n \in W$ linear unabhängig. Man beweise, dass die folgenden $m + n$ Elemente von V linear unabhängig sind:

$$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n.$$

3) Es sei $n \geq m$. Es sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix vom Rang m. Man beweise, dass es einem Matrix $B \in M(n \times m, K)$ gibt, so dass

$$AB = E_m.$$

(E_m bezeichnet die Einheitsmatrix.)

4) Wir betrachten Funktionen $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Man finde Polynome P und Q vom Grad ≤ 1, so dass

$$\frac{1}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 1)} = \frac{P}{x^2 + x + 3} + \frac{Q}{x^2 + 1}.$$

5) Wir betrachten das Wort

$$a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ c\ c$$

Wieviele verschiedene Wörter kann man dadurch bilden, dass man die Buchstaben in diesem Wort vertauscht?

6) Es sei $n \geq 3$. Es seien $v_i = (a_{\ell i}) \in K^n$, $i = 1, 2, 3$ drei Vektoren, die linear unabhängig sind. Man beweise, dass es natürliche Zahlen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3

gibt, so dass $1 \leq \ell_1 < \ell_1 < \ell_3 \leq n$ und so dass die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{K}^3$ linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} a_{\ell_1 1} \\ a_{\ell_2 1} \\ a_{\ell_3,1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{\ell_1 2} \\ a_{\ell_2 2} \\ a_{\ell_3,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{\ell_1 3} \\ a_{\ell_2 3} \\ a_{\ell_3,3} \end{pmatrix}$$

7) Man finde eine Basis des Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$, der aus allen Vektoren $\underline{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^4$ besteht, so dass

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & = 0 \end{array}$$

Alle Lösungen müssen begründet werden!