Parallelprojektionen und Affine Abbildungen von Ebenen

Definition 0.1 *Es seien G und H zwei Ebenen. Eine Abbildung $\pi : G \to H$ heisst affin, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Verschiedene Punkte von G werden auf verschiedene Punkte von H abbgebildet.

(ii) Jeder Punkt von $U \in H$ ist das Bild eines Punktes $A \in G$, d.h.

$$\pi(A) = U.$$

(iii) Das Bild einer Geraden bei der Abbildung π ist wieder eine Gerade.

(iv) Wenn a und b zwei parallele Geraden auf der Ebene G sind, so sind auch ihre Bilder $\pi(a)$ und $\pi(b)$ parallele Geraden.

(v) Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden g in der Ebene G. Dann liegen ihre Bilder $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$ auf einer Geraden in H und haben dasgleiche Teilverhältnis:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{C'B'}{C'A'}.$$

Bemerkungen zur Definition: Eine Abbildung, die den Bedingungen (i) und (ii) genüngt nennt man bijektiv.

Man kann der Bedingung (v) noch eine allgemeinere Form geben:

Es seien $\vec{CA}$ und $\vec{DB}$ zwei parallele Vektoren in der Ebene G, so dass $C \neq A$ und $D \neq B$, d.h. die Vektoren sind nicht 0. Wie oben sei $\pi(A) = A'$ usw.. Dann sind nach (vi) auch die Vektoren $\vec{C'A'}$ und $\vec{D'B'}$ parallel. Es gilt:

$$\frac{\vec{CA}}{\vec{DB}} = \frac{\vec{C'A'}}{\vec{D'B'}}$$

Wenn $\tau : g \to h$ eine bijektive Abbildung einer Gerade g auf eine Gerade h ist, so nennt man τ affin, wenn die Bedingung (v) erfüllt ist.

Es sei $\sigma : H \to L$ eine weitere affine Abbildung von H auf eine Ebene L. Es sei $P \in G$ ein Punkt und es sei $\pi(P) = P' \in H$. Man wendet auf P' die Abbildung σ an und erhält einen Punkt $\sigma(P') = P'' \in L$. Die Zuordnung τ, die einem Punkt $P \in G$ den Punkt $P'' \in L$ zuordnet, ist ebenfalls eine affine Abbildung $\tau : G \to L$. Man drückt das so aus:

$$\tau(P) = \sigma(\pi(P)), \quad \text{oder} \quad \tau = \sigma \circ \pi.$$

Man nennt τ das *Kompositum* der Abbildung π mit der Abbildung σ.

Auch im Fall von Geraden ist das Kompositum von affinen Abbildungen wieder affin.

Es seien F und Z zwei Ebenen im Raum. Wir nennen Z die Zeichenebene. Wir wählen eine Gerade p, die weder parallel zu F noch parallel zu Z ist und definieren die Parallelprojektion $\pi : F \to Z$ längs dieser Geraden von F auf Z.

Es sei $A \in F$. Dann erhält man $A' = \pi(A) \in Z$, indem man die Gerade p_1 durch durch A legt, welche parallel zu p ist. Dann gilt:

$$A' = p_1 \cap Z. \tag{1}$$

Die Parallelprojektion ist das wichtigste Beispiel einer affinen Abbildung.

Ein zweites Beispiel von affinen Abbildungen sind Bewegungen, die dadurch entstehen, in dem man die Ebene G nimmt und irgendwie auf die Ebene H legt. Dabei fällt ein Punkt $P \in G$ auf einen Punkt $P' \in H$. Dann ist $\pi(P) = P'$ eine affine Abbildung.

Ein drittes Beispiel ist die Streckung oder Stauchung einer Ebene Z. Man fixiert einen Punkt $M \in Z$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda > 0$. Man definiert die Stauchung $\kappa : Z \to Z$ wie folgt. Es sei $P \in M$. Wenn $P = M$, so setzt man $\pi(M) = M$. Wenn $P \neq M$, so legt man von M aus den Strahl s durch P. Dann gibt es genau einen Punkt $P' \in s$, so dass $|MP'| = \lambda|MP|$. Man setzt $\kappa(P) = P'$.

Wenn $\lambda < 0$ so definiert man $\kappa(P)$ so: Man nimmt auf der Geraden MP den Strahl t mit dem Anfang M, der nicht durch P geht. Dann gibt es genau einen Punkt $P' \in t$, so dass $|MP'| = -\lambda|MP|$. Man setzt $\kappa(P) = P'$ und $\kappa(M) = M$.

Man nennt M den Fixpunkt der Streckung κ.

Wir kehren zur Parallelprojektion $\pi : F \to Z$ zurück. Wir stellen uns die Aufgabe aus der Projektion einer Figur, die auf F liegt, die wahre Gestalt dieser Figur zu rekonstruieren.

Wir wollen ausschließen, dass F und Z parallel sind, denn in diesem Fall ist das Bild $\mathcal{F}'$ jeder Figur $\mathcal{F}$ in der Ebene F kongruent zu $\mathcal{F}$.

Wir nennen die Schnittgerade s der Ebene F mit der Zeichenebene Z die Spur von F in der Zeichenebene. Für einen Punkt P der Spur gilt offenbar $P = P'$.

Wir drehen jetzt die Ebene F um die Spur, bis sie mit der Zeichenebene zusammenfällt. Es gibt zwei Möglichkeiten, von denen wir eine auswählen. Bei dieser Drehung (auch Klappung genannt) wird ein Punkt $A \in F$ auf einen Punkt $A_* \in Z$ der Zeichenebene gelegt. Die Vorschrift θ, die A auf A_* abbildet, ist eine Kongruenzabbildung

$$\theta : F \to Z,$$

d.h. Figuren in der Ebene F werden auf deckungsgleiche Figuren in der Ebene Z abbgebildet. Insbesondere ist die Abbildung θ dann affin.

Man kann auch die Parallelprojektion σ längs der Geraden p von Z auf F betrachten. Das ist die Umkehrabbildung zu π, d.h. es gilt $\sigma(A') = A$. Das Kompositum $\tau = \theta \circ \sigma$ ist die affine Abbildung, welche $A' \in Z$ den Punkt $A_* \in Z$ zuordnet. Das Bild von $\mathcal{F}' \subset Z$ bei dieser Abbildung ist die Klappung von $\mathcal{F}$ und zeigt daher $\mathcal{F}$ in wahrer Größe.

Angenommen wir kennen A_* und A' für irgendeinen festen Punkt $A \in F$.

Es sei $B \in F$ ein weiterer Punkt, von dem wir nur die Projektion B' kennen. Wir wollen im folgenden zeigen, wie man B_* konstruieren kann.

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\sigma} & F & \xrightarrow{\theta} & Z. \\ A' & \mapsto & A & \mapsto & A_* \end{array}$$

Für einen Punkt $P \in s$ der Spur gilt $P = P' = P_*$ und folglich $\tau(P) = P$. Wir sehen, dass P ein Fixpunkt von τ ist.

Wir verbinden jetzt den Punkt A' mit A_* in der Zeichenebene Z. Wir nehmen an, dass die Punkte A' und A_* verschieden sind und dass die Verbindungsgerade $A'A_*$ die Spur s in einem Punkt P schneidet. Es sei B ein weiterer Punkt von F, der nicht auf s liegt. Dann gilt:

Die Geraden $A'A_*$ ist parallel zur Geraden $B'B_*$.

In der Tat, wir betrachten die Parallele zu der Geraden $A'P$ durch den Punkt B'. Diese Parallele schneidet s in einem Punkt Q. Die affine Abbildung κ bildet die beiden parallelen Strecken $\overline{A'P}$ und $\overline{B'Q}$ auf zwei parallele Strecken

$\overline{\tau(A')\tau(P)} = \overline{A_*P}$ und $\overline{\tau(B')\tau(Q)} = \overline{B_*Q}$ ab. Weil A', P, A_* auf einer Geraden liegen, liegen dann auch B', Q, B_* auf einer Geraden. Das wollten wir beweisen.

Wir nehmen jetzt an, dass die Gerade $A'B'$ die Spur s in einem Punkt K schneidet. Dann ist K ein Fixpunkt von τ und deshalb muss τ die Gerade $KA'B'$ auf die Gerade KA_*B_* abbilden.

Also kann man B_* finden als Durchschnitt von KA_* und der Parallelen zu $A'A_*$ durch den Punkt B'. (siehe Abbildungen.)

Die orthogonale Projektion

Es sei Z eine Ebene im Raum $\mathbb{E}$. Es sei p eine Gerade, die auf Z senkrecht steht. Die Parallelprojektion längs der Geraden p:

$$\mathbb{E} \to Z$$

nennen wir die orthogonale Projektion auf Z.

Es sei F eine Ebene im Raum ist, die nicht senkrecht auf Z steht. Man kann F dadurch festlegen, dass man die Spur $s = F \cap Z$ in Z vorgibt und eine weiteren Punkt $P \in F$, welcher nicht auf der Spur liegt.

Den Punkt P legen wir fest, indem wir seine orthogonale Projektion P' auf Z vorgeben und seinen Abstand zu der Ebene Z. Um das eindeutig zu machen, müssen wir noch sagen auf welcher Seite von Z der Punkt P liegen soll. Dazu versehen wir den Abstand mit einem Vorzeichen. Das Vorzeichen $+$ soll bedeuten, dass P auf einer festgewählten Seite von Z liegt. Wir sprechen von einem kotierten Punkt in Z:

$$P'(4), \qquad Q'(-6).$$

Die Klappung von $P \in F$ lässt sich dann mit Hilfe des kotierten Punktes konstruieren.