Projektion eines rechten Winkels

Satz 1 *Wir betrachten die orthogonale Projektion des Raumes $\mathbb{A}$ auf eine Ebene G. Es sei $\angle PSQ$ ein Winkel im Raum, so dass keiner der Schenkel SP oder SQ senkrecht zu G ist. Es sei $P'S'Q'$ die Projektion dieses Winkels auf die Ebene G.*

Es sei $\angle PSQ$ ein rechter Winkel. Dann ist die Projektion $\angle P'S'Q'$ genau dann ein rechter Winkel, wenn einer der beiden Schenkel SP oder SQ parallel zu G ist.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass SP parallel zu G ist. Man kann G durch eine parallele Ebene ersetzen. Also kann man $S' = S$ und $P' = P$ annehmen. Man legt die Ebene E durch S, die auf SP senkrecht steht. Dann gilt $Q \in E$ und $Q' \in E \cap G$. Da $E \cap G$ senkrecht auf SP steht, ist $Q'SP$ ein rechter Winkel.

Jetzt sei umgekehrt $\angle P'S'Q'$ ein rechter Winkel. Wir können $S = S'$ voraussetzen. Im Fall $P = P'$ ist SP parallel zu G. Wir nehmen an, dass $P \neq P'$. Es sei E die Ebene durch S, die senkrecht auf SQ steht. Es gilt $P \in E$. Die Geraden $E \cap G$ und SQ bilden einen rechten Winkel. Die Projektion dieses Winkels wird von $E \cap G$ und SQ' gebildet. Dies ist, nach dem was wir schon bewiesen haben, ein rechter Winkel. Also gilt $P' \in E \cap G$. Die Gerade PP' liegt also in E und steht senkrecht auf G. Dann steht auch E senkrecht auf G. Damit liegt die Gerade SQ in G, da sie senkrecht auf E steht.