Formelsammlung für Flächen im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Es sei eine Parametrisierung gegeben:

$$\alpha(u,v) : U \to M, \tag{1}$$

wobei U eine offene Menge des $\mathbb{R}^2$ ist. Wir setzen

$$\alpha_u(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v). \quad \alpha_v(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v).$$

Das ist eine Basis des Tangentialraumes $T_P M$, im Punkt $P = \alpha(u,v)$ als Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Man definiert

$$E(u,v) =< \alpha_u \cdot \alpha_u >, \quad F(u,v) =< \alpha_u \cdot \alpha_v >, \quad G(u,v) =< \alpha_v \cdot \alpha_v > .$$

Wir festes (u,v) definiert die Matrix

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Das ist die 1.Fundamentalform. Die Tangentialabbildung

$$T_{(u,v)}\alpha : \mathbb{R}^2 \to T_P(M) \tag{3}$$

ist dann eine Isometrie euklidischer Verktorräumen.

Man kann das Bogenmß und dass Flächenmaß auf M mit Hilfe der Koordinaten (u,v) ausdrücken:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \\ |\alpha_u \times \alpha_v| du dv &= \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

Definition 0.1 *Ein Kurve $\delta : (a,b) \to M$ heißt eine Geodätische, wenn $\delta''(t)$ orthogonal zum Tangentialraum $T_P M$ im Punkt $P = \delta(t)$ ist, für alle $t \in (a,b)$.*

Daraus folgt, dass $|\delta'(t)| = \text{const}$.

Es sei α eine Parametrisierung von M (vgl. (1)). Es sei $\gamma : (a,b) \to U$ eine Kurve. Dann ist $\delta = \alpha \circ \gamma$ eine Kurve auf M. Die Kurve δ ist genau dann eine Geodätische, wenn die folgenden Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(E\gamma_1' + F\gamma_2') &= \tfrac{1}{2}(E_u(\gamma_1')^2 + 2F_u\gamma_1'\gamma_2' + G_u(\gamma_2')^2) \\ \tfrac{d}{dt}(F\gamma_1' + G\gamma_2') &= \tfrac{1}{2}(E_v(\gamma_1')^2 + 2F_v\gamma_1'\gamma_2' + G_v(\gamma_2')^2) \end{aligned}$$

Eine Orientierung einer Fläche M ist eine C^∞-Abbildung

$$\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

so dass $|\mathbf{n}| = 1$. Wenn eine solche Abbildung existiert, so ist $-\mathbf{n}$ die einzige weitere. Man nennt (4) die Gaußsche Abbildung. Es sei $P \in M$. Das Bild der Abbildung $T_P(\mathbf{n}) : T_P M \to \mathbb{R}^3$ ist in $T_P(M)$ enthalten. Daher erhalten wir einen Endomorphismus des Vektorraums $T_P M$:

$$T_P(\mathbf{n}) : T_P M \to T_P M.$$

Die Gaußsche Krümmung ist so definiert:

$$\mathcal{K}(P) := \det T_P(\mathbf{n}).$$

Die 2.Fundamentalform ist die folgende Bilinearform auf dem Vektorraum $T_P M$.

$$\mathrm{I\!I}_P(X, Y) = -\langle T_P(\mathbf{n})(X) \cdot Y \rangle.$$

Das ist eine symmetrische Bilinearform.

Die 2.Fundamentalform hat die folgende geometrische Interpretation: Es sei $\gamma(a, b) \to M$ eine Kurve, die im Bogenmaß parametrisiert. Es sei $s_0 \in (a, b)$ und $\mathbf{t} = \dot\gamma(s_0)$ ihr Tangentialvektor. Dann gilt:

$$\langle \ddot\gamma(s_0) \cdot \mathbf{n}(P) \rangle = \mathrm{I\!I}_P(\mathbf{t}, \mathbf{t}).$$

Man wendet diese Tatsache so an: Es sei $P \in M$ und $\mathbf{t} \in T_P M$ ein Tangentialvektor, mit $|\mathbf{t}| = 1$. Es sei γ die Kurve, welche als Durchschnitt der Ebene $P + \mathcal{L}(\mathbf{t}, \mathbf{n}(P))$ mit M entsteht ($\mathcal{L}$ = lineare Hülle). Es sei γ eine Parametrisierung nach dem Bogenmaß, so dass $\gamma(s_0) = P$. Dann sind $\ddot\gamma(s_0)$ und $\mathbf{n}(P)$ linear abhängig. Deshalb ist

$$\mathrm{I\!I}_P(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \text{orientierte Krümmung von} \gamma.$$

Das ist die Schnittkrümmung nach Euler.

Es sei α eine Parametrisierung von M. Mit Hilfe des Isomorphismus (3) induziert $\mathrm{I\!I}_P$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \tag{5}$$

wobei

$$L = \langle \alpha_{uu} \cdot \mathbf{n}(P) \rangle, \quad M = \langle \alpha_{uv} \cdot \mathbf{n}(P) \rangle, \quad N = \langle \alpha_{vv} \cdot \mathbf{n}(P) \rangle.$$