Klausur in Geomtrie am 14.7.2015

1) Ein Torus T entsteht, wenn man einen Kreis um eine Gerade, die in der Kreisebene liegt und den Kreis nicht berührt, rotieren lässt. Es sei r der Radius des Kreises und es sei d der Abstand seines Mittelpunktes von der Geraden. Wie groß ist die Oberfläche von T?

2) Es sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

eine Sphäre mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $r > 0$. Es sei $P \in S$ ein Punkt. Es sei $\mathbf{I}_P$ die erste Fundamentalform auf dem Tangentialraum $T_P S$ und $\mathbf{II}_P$ die zweite Fundamentalform. Man beweise, dass

$$\frac{1}{r}\mathbf{I}_P = \pm\mathbf{II}_P$$

Das Vorzeichen hängt von der Orientierung von S ab, die man wählt.

Man kann folgende Parametrisierung α von S benutzen: Es sei

$$U = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \phi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\alpha(\phi, \psi) = (\cos\phi \cdot \cos\psi,\ \sin\phi \cdot \cos\psi,\ \sin\psi).$$

3) Die Schraubenlinie mit n Windungen ist die folgende Kurve $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$:

$$\rho(t) = (\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt, t)$$

Man berechne ihre Bogenlänge. Man begründe die benutzte Formel.

4) Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine Matrix. Man nennt A eine Drehmatrix, wenn $\det A = 1$ und wenn für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$< (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) >=< \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > .$$

Es sei A eine Drehmatrix. Man beweise die folgende Formel für das Vektorprodukt:

$$A\mathbf{x} \times A\mathbf{y} = A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

5) Es sei C eine Kurve. Es sei $\gamma : (a,b) \to C$ eine Parametrisierung nach dem Bogenmaß, d.h. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$. Man nennt $\mathbf{t}(s) := \dot{\gamma}(s)$ den Tangentialvektor im Punkt $\gamma(s) \in C$. Es gelten die Frenetschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Man erkläre an Hand dieser Gleichungen, wie die Torsion definiert ist. Man beweise, dass eine Kurve eben ist, wenn ihre Torsion in jedem Punkt 0 ist.

6) Es sei C die Kurve $y^2 = x$, $0 < y < 2$ in der Ebene. Es sei M die Rotationsfläche, die ensteht, wenn man C um die x-Achse rotieren läßt. Man betrachte den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ von M.

Man beweise, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (2,1,0)$ und $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$ eine Basis des Tangentialraumes $T_P(M)$ bilden. Es sei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor von M im Punkt P.

Man berechne die Schnittkrümmungen, die man erhält, wenn man M mit den Ebenen $E_i = P + \mathbb{R}\mathbf{v}_i + \mathbb{R}\mathbf{n}$ für $i = 1,2$ schneidet.

7) Es sei M die Fläche aller Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die folgender Gleichung genügen

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Man finde die geodätischen Kurven auf dieser Fläche.

(Man kann die DGL für Geodätische verwenden.)