Musterlösung, Aufgabe 1

1) Ein Torus T entsteht, wenn man einen Kreis um eine Gerade, die in der Kreisebene liegt und den Kreis nicht berührt, rotieren lässt. Es sei r der Radius des Kreises und es sei e der Abstand seines Mittelpunktes von der Geraden. Wie groß ist die Oberfläche von T?

Wir erklären mehr als in der Aufgabe verlangt war.

Es sei $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ eine Kurve in der $x-y$-Ebene, die im Bogenmaß parmetrisiert ist. Es sei $a \leq s \leq b$. Wir setzen voraus, dass $\gamma_2(s) \geq 0$.

Wenn man diese Kurve um die x-Achse rotieren läßt so entsteht eine Fläche M.

Der Satz von Pappus sagt, dass der Flächeninhalt A von M gleich

$$A = 2\pi \int_a^b \gamma_2(s) ds \tag{1}$$

ist.

Beweis: Die Fläche M hat im $\mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung

$$\alpha(s, \phi) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s) \cos \phi, \gamma_2(s) \sin \phi).$$

Man berechnet die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \alpha_s(s, \phi) &= (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s) \cos \phi, \gamma_2'(s) \sin \phi) \\ \alpha_\phi(s, \phi) &= (0, -\gamma_2(s) \sin \phi, \gamma_2(s) \cos \phi). \end{aligned}$$

Weil wir Bogenmaß haben gilt

$$(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2 = 1.$$

Deshalb finden wir: $E := (\alpha_s \cdot \alpha_s) = 1$, $F := (\alpha_s \cdot \alpha_\phi) = 0$, $G := (\alpha_\phi \cdot \alpha_\phi) = \gamma_2(s)^2$.

Die allgemeinen Formel für der Flächeninhalt einer parametrisierten Fläche lautet wie folgt. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge im Definitionsbereich von α. Dann ist die Fläche A von $\alpha(G) \subset M$

$$A = \int_G \sqrt{EG - F^2}\, ds d\phi.$$

In unserem Fall ist G die Teilmenge $G = \{(s, \phi) \mid a \leq s \leq b,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$. Also gilt

$$A = \int_a^b \int_0^{2\pi} \gamma_2(s) d\phi ds.$$

Daraus folgt die Formel (1).

Man kann auch eine Formel angeben, wenn die Parametrisierung der Kurve nicht im Bogenmaß ist. Dann gilt: $E := (\alpha_s \cdot \alpha_s) = (\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2$ und F, G sind wie vorher. Dann ergibt sich

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(s))^2 + (\gamma_2'(s))^2}\, \gamma_2(s) d\phi ds.$$

Jetzt kommt was in der Aufgabe verlangt war.

Wir betrachten den Kreis in der $x - y$-Ebene mit dem Mittelpunkt $(0, e)$ und dem Radius r. Er hat im Bogenmaß die Parameterdarstellung

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = (r \cos \frac{s}{r}, e + r \sin \frac{s}{r}), \quad 0 \le s \le 2\pi r.$$

Also erhalten wir aus der Formel von Pappus:

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi r} (e + r \sin \frac{s}{r}) ds = 4\pi^2 er.$$

(Das Integral über die Sinusfunktion ist 0.) Damit ist die Aufgabe beendet.

Wir erklären noch, wie man das von M eingeschlossene Volumen V berechnet. Dazu schneiden wir M mit der Ebene durch den Punkt $(x, 0, 0)$, die senkrecht auf der x-Achse steht. Dann entsteht auf der Ebene ein Kreisring mit dem inneren Radius $e - \sqrt{r^2 - x^2}$ und dem äußeren Radius $e + \sqrt{r^2 - x^2}$. Für die Fläche $F(x)$ dieses Kreisringes ergibt sich:

$$\pi(e + \sqrt{r^2 + x^2})^2 - \pi(e - \sqrt{r^2 - x^2})^2 = 4\pi e\sqrt{r^2 - x^2}.$$

$$V = \int_{-r}^{r} 4\pi e \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi er^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} d\frac{x}{r} =$$

Man macht die Substitution $t = x/r$:

$$= 4\pi er^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} dt =$$

Dann macht man die Substitution $t = \sin \phi$

$$= 4\pi er^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} d \sin \phi = 4\pi er^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi$$

Die Stammfunktion von $\cos^2 \phi$ ist $(1/2)(\phi + \cos \phi \sin \phi)$. Damit ergibt sich für das letzte Integral der Wert $\pi/2$. Damit erhält man

$$V = 2\pi^2 er^2.$$