Musterlösung Aufgabe 5

5) Es sei C eine Kurve. Es sei $\gamma : (a, b) \to C$ eine Parametrisierung nach dem Bogenmaß, d.h. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$. Man nennt $\mathbf{t}(s) := \dot{\gamma}(s)$ den Tangentialvektor im Punkt $\gamma(s) \in C$. Es gelten die Frenetschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned} \tag{1}$$

Man erkläre an Hand dieser Gleichungen, wie die Torsion definiert ist. Man beweise, dass eine Kurve eben ist, wenn ihre Torsion in jedem Punkt 0 ist. Für solche s sind $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\mathbf{n}$

Lösung: Der Normalenvektor $\mathbf{n}(s)$ ist für alle $s \in (a, b)$ definiert, für die $\dot{\mathbf{t}}(s) \neq 0$. Die Krümmung $\kappa(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ sind dann eindeutig dadurch definiert, dass $\kappa(s) > 0$, $|\mathbf{n}(s)| = 1$ und dass die erste Gleichung von (1) gilt. Wenn man die Gleichung

$$(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s)) = 1$$

nach s differenziert, so folgt dass $\mathbf{t}(s)$ und $\dot{\mathbf{t}}(s)$ orthogonal sind. Aber dann sind auch $\mathbf{t}(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ orthogonal:

$$(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) = 0.$$

Schließlich definiert man $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ als Vektorprodukt. Wir wissen aus der Definition des Vektorprodukts, dass $|\mathbf{b}(s)| = 1$. Wenn wir die Gleichung $(\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = 1$ nach s differenzieren erhalten wir

$$(\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = 0. \tag{2}$$

Aus der Definition des Vektorprodukts folgt die Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{b}(s)$ und $\mathbf{t}(s)$:

$$(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = 0.$$

Wir differenzieren das nach s und erhalten:

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = (\dot{\mathbf{t}}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) + (\mathbf{t}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s)). \tag{3}$$

Da $\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ ist das erste Skalarprodukt auf der rechten Seite der Gleichung (3) gleich 0. Es folgt, dass

$$(\mathbf{t}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s)) = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (2) und (4) zeigen, dass $\dot{\mathbf{b}}(s)$ orthogonal zu dem Untervektorraum ist, der von $\mathbf{b}(s)$ und $\mathbf{t}(s)$ aufgepannt wird. Das orthogonale Komplement dieses Untervektorraums ist der eindimensionale Vektorraum $\mathbb{R}\mathbf{n}(s)$. Somit sind die Vektoren $\dot{\mathbf{b}}(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ linear abhänging. Also existiert $\tau(s) \in \mathbb{R}$, so dass die letzte Gleichung in (1) erfüllt ist.

Jetzt kommen wir zur Aufgabe. Wir nehmen an, dass $\tau(s) = 0$ ist. Dann folgt aus der letzten Gleichung (1), dass $\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$. Folglich ist der Vektor $\mathbf{b}(s) = \mathbf{v}$ unabhängig von s. Wir betrachten das Skalarprodukt

$$(\gamma(s) \cdot \mathbf{v}). \tag{5}$$

Wir erhalten für die Ableitung:

$$\frac{d}{ds}(\gamma(s) \cdot \mathbf{v}) = (\dot{\gamma}(s) \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt da $\mathbf{b}(s)$ und $\mathbf{t}(s)$ nach Definition des Vektorprodukts orthogonal sind. Also ist (5) unabhängig von s. Also liegt die Kurve γ in der Ebene, die durch

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = const.$$

definiert wird.