

Musterlösung, Aufgabe 7

7) Es sei M die Fläche aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die folgender Gleichung genügen

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \quad (1)$$

Man finde die geodätischen Kurven auf dieser Fläche.
(Man kann die DGL für Geodätische verwenden.)

Lösung: Die Gleichung (1) definiert eine Kurve in der $x - y$ -Ebene (Ellipse). Es sei $\tau(u) = (\tau_1(u), \tau_2(u))$ wo $0 \leq u \leq \ell$ eine Parametrisierung der Ellipse nach dem Bogenmaß. Dann gilt nach Definition die Gleichung:

$$(\tau_1'(u))^2 + (\tau_2'(u))^2 = 1. \quad (2)$$

Die Zahl ℓ ist also die Länge der Ellipse.

Die Fläche M hat folgende Parametrisierung:

$$\alpha(u, v) = (\tau_1(u), \tau_2(u), v).$$

Man findet:

$$\alpha_u = (\tau_1'(u), \tau_2'(u), 0), \quad \alpha_v = (0, 0, 1).$$

Unter Berücksichtigung von (2) ergibt sich $E := (\alpha_u \cdot \alpha_u) = 1$, $F := (\alpha_u \cdot \alpha_v) = 0$, $G := (\alpha_v \cdot \alpha_v) = 1$.

Es sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ eine Kurve in der $u - v$ Ebene. Nach der Vorlesung ist $\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ genau dann eine Geodätische auf M , wenn die geodätischen Differentialgleichungen erfüllt sind. Da die partiellen Ableitungen von E, F, G nach u und v gleich 0 sind, haben diese Gleichungen die Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E\gamma_1' + F\gamma_2') &= 0 \\ \frac{d}{dt}(F\gamma_1' + G\gamma_2') &= 0. \end{aligned}$$

Also ergibt sich $\gamma_1''(t) = 0$ und $\gamma_2''(t) = 0$. Wir erhalten, dass $\gamma_1(t) = at + b$ und $\gamma_2(t) = ct + d$ lineare Funktionen sein müssen. Also sind die Geodätischen auf M die Bilder von Geraden in der $u - v$ -Ebene bei der Abbildung α .

Moral: Wenn man ein Blatt Papier zusammenrollt, so ändern sich dabei die Längenverhältnisse auf dem Papier nicht.