Die Methode der stereographischen Projektion

Es sei $\mathbb{A}$ ein dreidimensionaler euklidischer Raum. Es sei S eine Sphäre und $O \in S$ ein Punkt. Es sei $O' \in S$ die Antipode von O. Es sei E' die Tangentialebene an S im Punkt O'. Man definiert eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & S \setminus \{O\} & \to & E'. \\ & P & \mapsto & P' = OP \cap E' \end{array} \tag{1}$$

Man nennt σ die stereographische Projektion. Das ist die Einschränkung der Zentralprojektion $\mathbb{A} \setminus \{O\} \to E'$ auf S.

Proposition 0.1 *Es sei C ein Kreis auf der Sphäre S. Dann ist sein Bild $\sigma(C)$ bei der stereographischen Projektion wieder ein Kreis.*

Beweis: Es sei K die Sphäre mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\overline{OO'}$. Dann ist P' in (1) die Inversion von P an K. Es sei R eine Sphäre, so dass $R \cap S = C$. Die Inversion von R ist eine Sphäre $\hat{R}$. Also ist $\sigma(C) = \hat{R} \cap E'$ ein Kreis. $Q.E.D.$

Proposition 0.2 *Es sei $E \subset \mathbb{A}$ eine Ebene. Es sei C ein Kreis auf E und g eine Gerade in E, die außerhalb von C veräuft.*

Dann gibt es eine zentrale Projektion $\pi : E \to E'$ mit der Verschwindungsgerade g, so dass $\pi(C)$ ein Kreis ist.

Beweis: Man nimmt eine Sphäre S, so dass $S \cap E = C$. Es sei T die Tangentialebene durch g an S. Es sei $O \in S$ der Brührungpunkt von T und es sei O' die Antipode. Es sei E' die Tangentialebene an S im Punkt O'. Die Zentralprojektion $\pi : E \to E'$ mit dem Augpunkt O tut das Gewünschte. $Q.E.D.$ Wir sagen, dass g auf die unendlich ferne Gerade abgebildet wird.

Proposition 0.3 *Es sei $E \subset \mathbb{A}$ eine Ebene. Es sei C ein Kreis auf E. Es sei P ein Punkt im Innern von C.*

Dann gibt es eine zentrale Projektion $\pi : E \to E'$, so dass $\pi(C)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt $\pi(P)$ ist.

Beweis: Man lege zwei Sehnen A_1B_1 und A_2B_2 durch P. Es sei $X = A_1A_2 \cap B_1B_2$ und $Y = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Dann verläuft die Gerade $g = XY$ außerhalb des Kreises C. Dann findet man zu C und g die Projektion $\pi : E \to E'$ von Proposition 0.2. Die tut das Gewünschte. $Q.E.D.$