

Bielefeld, den 15.5.12

## Übungen 10

1) Es sei  $u = a + bi$  eine komplexe Zahl. Wir bezeichnen mit  $\bar{u}$  die konjugiert komplexe Zahl. Die komplexe Zahl  $u$  ist genau dann reell, wenn  $u = \bar{u}$ .

Es seien  $a_0, \dots, a_n$  reelle Zahlen und es sei  $z$  eine komplexe Zahl. Man beweise, dass die folgenden Zahlen komplex konjugiert sind.

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$$

und

$$a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \dots + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + a_n\bar{z}^n$$

2) Wir betrachten ein Polynom

$$x^2 + px + q.$$

Hier sind  $p$  und  $q$  reelle Zahlen. Die  $p - q$ -Formel liefert im allgemeinen zwei Nullstellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dieses Polynoms. Wenn es nur eine Nullstelle gibt, so sei  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Die Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind im allgemeinen komplexe Zahlen.

Man beweise, dass

$$x^2 + px + q = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

Wir nehmen jetzt an, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nicht reell sind. Man zeige, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  komplex konjugiert sind. Man beweise, dass  $q > 0$  und

$$-1 < \frac{p}{2\sqrt{q}} < 1.$$

Man findet daher einen Winkel  $\phi$ , so dass

$$\cos \phi = \frac{-p}{2\sqrt{q}}.$$

Man zeige, dass  $\lambda_1 = \sqrt{q}e^{i\phi}$  und  $\lambda_2 = \sqrt{q}e^{-i\phi}$ .

3) Man finde die reellwertigen Funktionen, die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$y'' + y' + y = 0.$$

4) Es sei  $\lambda$  eine komplexe Zahl. Es sei  $(D - \lambda)$  der Operator, welcher eine komplexwertigen Funktion  $f(t)$  die Funktion  $f'(t) - \lambda f(t)$  zuordnet.

Es sei  $k \geq 0$  eine ganze Zahl. Man berechne

$$(D - \lambda)(t^k e^{\lambda t})$$

Man folgere, dass für  $n > k$

$$(D - \lambda)^n(t^k e^{\lambda t}) = 0$$

Man finde die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

**Abgabe am 22.6.2012.**