Bielefeld, den 26.4.12

Übungen 4

1) In der Ebene E sei ein Koordinatensystem gegeben. Wir betrachen die Gerade

$$y = 2x + 3.$$

Wenn wir E um 30^o um den Nullpunkt drehen, so erhalten wir eine neue Gerade. Wie lautet ihre Gleichung?

($\sin 30^o = 1/2$, $\cos 30^o = \sqrt{3}/2$.)

2) Man betrachte folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man finde Produkte von Matrizen $AE = A_1$ und $EA = A_2$. Man beweise, dass $\det A = \det A_1$ und $\det A = \det A_2$.

(Multiplikationssatz für det.)

3) Es sei E eine Ebene in der ein kartesisches Koordinatensystem gewählt ist. Dann kann man jede affine Abbildung $\alpha : E \to E$ in der Form schreiben:

$$\alpha(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}. \tag{1}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{x}$ die Koordinaten eines Punktes. Die Matrix A und $\mathbf{b}$ sind durch die affine Abbildung bestimmt.

Es sei C ein Punkt der Ebene mit die Koordinaten

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Die Drehung $\alpha : E \to E$ der Ebene um den Punkt C und um den Winkel ϕ ist eine affine Abbildung. Man finde A und $\mathbf{b}$ in den gegebenen Koordinaten.

(Hinweis: Es sei C' ein weiterer Punkt. Wenn man einen Vektor $\mathbf{v}$ um C' und den Winkel ϕ dreht, erhält man den gleichen Vektor, als wenn man um C um den Winkel ϕ dreht.)

4) In der Ebene E sei P ein Punkt und $\mathbf{v}$ ein Vektor. Wir betrachten die Gerade g mit der Parameterdarstellung

$$P + \lambda \mathbf{v}.$$

Wir bezeichnen mit $s : E \to E$ die Spieglung an dieser Geraden. Es sei $\hat{s}$ die zugehörige Abbildung der Vektoren. Dann gilt für beliebige Punkte $S, T \in E$:

$$s(R) + \hat{s}(\overrightarrow{RT}) = s(T).$$

Wir wählen eine Vektor $\mathbf{w} \neq 0$, der orthogonal zu $\mathbf{v}$ ist.

Für einen Punkt Q bezeichnen wir mit $\mathbf{u}$ den Vektor $\overrightarrow{PQ}$. Die Spieglung ist durch folgende Formeln gegeben

$$\begin{aligned} s(Q) &= Q - 2\tfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\mathbf{w}, \\ s(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\tfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Nach dieser Erklärung (siehe Vorlesung) kommt die Aufgabe. In der Ebene E sei ein Koordinatensystem festgelegt. Wir betrachten die Gerade mit der Gleichung:

$$y = ax, \quad \text{wo } a \in \mathbb{R} \text{ fest gewählt.}$$

Man schreibe die Spieglung an dieser Geraden in Matrixform (1).

Abgabe am 11.5.2012.