

## Übungen 6

1) Es sei  $k > 0$  eine reelle Zahl. Es bezeichne  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  die Koordinaten eines Punktes im Raum. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Wir stellen uns das Gravitationsfeld eines Sterns vor, der sich im 0-Punkt befindet. Auf einen Körper mit der Masse  $m$  im Punkt  $\mathbf{x}$  wirkt dann die Kraft  $m \mathbf{grad} U(\mathbf{x})$  und die Beschleunigung ist  $\mathbf{grad} U(\mathbf{x})$ . Der Körper möge sich auf einer Kurve bewegen. Seine Koordinaten zum Zeitpunkt  $t$  seien:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Nach Vorlesung lauten die Bewegungsgleichungen:

$$x_1''(t) = \frac{\partial U(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1}, \quad x_2''(t) = \frac{\partial U(\mathbf{x}(t))}{\partial x_2}, \quad x_3''(t) = \frac{\partial U(\mathbf{x}(t))}{\partial x_3}$$

Man zeige, dass die Ableitung der folgenden Funktion 0 ist

$$E(t) = (1/2)\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t) - U(\mathbf{x}(t)).$$

2) Man betrachte die Funktion:

$$F(x, y) = e^y + y + x - 1$$

Gibt es eine Funktion  $f(x)$ , so dass  $f(0) = 0$ , die für  $x$  in der Nähe von 0 definiert ist, und so dass

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Man berechne  $f'(0)$ .

3) Die Funktion  $u(x, y)$  sei durch die folgende Gleichung implizit gegeben:

$$y \tan u(x, y) - x = 0$$

Man berechne die partielle Ableitung

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

4) Es sei  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Wir betrachten die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Es seien  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  zwei Vektoren in der Ebene mit den Koordinaten

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Man beweise die folgende Identität von Skalarprodukten:

$$(D\mathbf{v}) \cdot (D\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Was ist die geometrische Bedeutung dieser Gleichung?

**Abgabe am 25.5.2012.**