

Bielefeld, den 22.5.12

## Übungen 7

Aus der Vorlesung: Polarkoordinaten und kartesische Koordinaten sind durch die folgenden Formeln verbunden:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (1)$$

Es sei  $f(x, y)$  eine Funktion. Wir setzen  $\tilde{f}(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ . Dann gelten die folgenden Umrechnungsformeln für die partiellen Ableitungen in einem Punkt, der die Polarkoordinaten  $(r_0, \phi_0)$  besitzt und die kartesischen Koordinaten  $(x_0, y_0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \phi_0) &= \cos \phi_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \phi_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi}(r_0, \phi_0) &= -r_0 \sin \phi_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + r_0 \cos \phi_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \cos \phi_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \phi_0) - \frac{1}{r_0} \sin \phi_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi}(r_0, \phi_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \sin \phi_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \phi_0) + \frac{1}{r_0} \cos \phi_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi}(r_0, \phi_0) \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Es sei  $\tilde{f}(r, \phi) = \phi$ . Man berechne die partiellen Ableitungen der entsprechenden Funktion  $f$ . Man folgere, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 2: Es sei  $a$  eine Zahl. Man betrachte die Kurve, welche mit der folgenden Parameterdarstellung in Polarkoordinaten

$$r = at, \quad \phi = t, \quad 0 \leq t.$$

Man berechne  $x'(t)$  und  $y'(t)$ . Was ist die Länge dieser Kurve, wenn  $1 \leq t \leq 2$ .

Aufgabe 3: Man betrachte die Kurve  $C$ :

$$y = t, x = t^2, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Man berechne das Integral:

$$\int_C y^2 dx + x^3 dy.$$

Aufgabe 4) Man berechne das folgende Doppelintegral:

$$\int_1^3 \int_2^5 (5x^2y - 2y^2) dx dy.$$

**Abgabe am 25.5.2012.**