

## Übungen 8

Aus der Vorlesung: Polarkoordinaten und kartesische Koordinaten sind durch die folgenden Formeln verbunden:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (1)$$

Es sei  $f(x, y)$  eine Funktion. Wir setzen  $\tilde{f}(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ . Es gilt die folgende Transformationsformel für Doppelintegrale:

$$\int \int_B f(x, y) dx dy = \int \int_{B'} \tilde{f}(r, \phi) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} \right| dr d\phi. \quad (2)$$

Hier ist  $B$  eine Gebiet in der  $x - y$ -Ebene und  $B'$  das entsprechende Gebiet in der  $r, \phi$ -Ebene.

Aufgabe 1: Es sei  $u(\phi)$  eine reelle Funktion die positive Werte annimmt und die auf einem Intervall  $[\phi_0, \phi_1]$ ,  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq 2\pi$  definiert sei. Wir betrachten in der  $r - \phi$ -Ebene die Kurve  $\gamma$ , deren Punkte die folgende Gleichung erfüllen:

$$r = u(\phi), \quad \text{wobei } \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2.$$

In  $x - y$ -Koordinaten hat diese Kurve die folgende Parameterdarstellung:

$$x = u(\phi) \cos \phi, \quad y = u(\phi) \sin \phi.$$

Es sei  $(x_1, y_1)$  der Punkt der  $\phi_1$  entspricht und  $(x_2, y_2)$  der Punkt der  $\phi_2$  entspricht.

Man betrachte in der  $x - y$ -Ebene das Gebiet (= Flächenstück)  $B$ , welches von der Strecke mit den Endpunkten  $(0, 0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , von der Strecke mit den Endpunkten  $(0, 0)$ ,  $(x_2, y_2)$  und der Kurve  $\gamma$  begrenzt wird.

Man beweise, dass die Fläche von  $B$  durch die folgende Formel gegeben ist:

$$\text{Fläche } B = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (u(\phi))^2 d\phi.$$

(Man kann die Formel (2) benutzen.)

2) Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Eine Hyperbel ist durch eine Gleichung der Form gegeben:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Man beweise, dass die Hyperbel die folgende Parameterdarstellung hat

$$x = a \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = b \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (3)$$

In Anlehnung an die Parameterdarstellung des Kreises definiert man die Funktionen "Sinus hyperbolicus" und "Kosinus hyperbolicus"

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Man beweise, dass für die Ableitungen gilt:  $(\cosh t)' = \sinh t$  und  $(\sinh t)' = \cosh t$ .

3) Es sei  $\gamma$  die Kurve die durch (3) gegeben ist, wobei  $t \in [-1, 1]$  und  $\delta$  die Strecke vom Punkt  $\gamma(1)$  zum Punkt  $\gamma(-1)$ . Wenn man beide Kurven hintereinander durchläuft, so erhält man eine Kurve  $\rho$ , die geschlossen ist (d.h. Anfangs- und Endpunkt von  $\rho$  sind gleich).

Man berechne

$$\int_{\rho} x dy.$$

Man schreibe das letzte Integral mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes als Doppelintegral.

4) Man finde eine Funktion  $F(x, y)$ , so dass

$$dF(x, y) = (y^2 \cos x + \cos y + 4 \sin^2 x \cos x) dx + (2y \sin x - x \sin y - 4y^3) dy.$$

**Abgabe am 8.6.2012.**