Übungen Algebraische Geometrie 11

1) Es sei A ein noetherscher Ring. Es sei $X = \operatorname{Spec} A$. Beweisen Sie, dass jede offene Menge $U \subset X$ quasikompakt ist. Diese Aussage gilt auch wenn X ein noethersches Schema ist: Ein Schema heißt noethersch, wenn eine endliche offene Überdeckung $X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ existiert, so dass $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ mit noetherschen Ringen A_i.

2) Es sei X ein topologischer Raum, so dass jede offene Menge von X quasikompakt ist. Es sei $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ eine Familie von Garben auf X. Beweisen Sie, dass die Prägarbe

$$U \mapsto \oplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$$

eine Garbe ist. Sie wird mit $\oplus_i \mathcal{F}_i$ bezeichnet. Folgern Sie, dass diese Garbe welk ist, wenn jede der Garben $\mathcal{F}_i$ welk ist.

Beweisen Sie, dass für beliebige $\mathcal{F}_i$ gilt:

$$H^m(X, \oplus_i \mathcal{F}_i) = \oplus_i H^m(X, \mathcal{F}_i),$$

3) Es sei K ein Körper. Wir betrachten den Polynomring:

$$A = K[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s].$$

Es sei $f = Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_s$. Man finde sämtliche Einheiten in dem Ring A_f.

4) Es sei $\mathcal{M}$ eine lokal freie kohärente Garbe auf $X = \mathbb{P}^1_K$. Es seien $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{M}(X)$ Schnitte, deren Keime im allgemeinen Punkt η eine Basis des $\kappa(\eta)$-Vektorraums $\mathcal{M}_\eta$ bilden. Man beweise, dass

$$\deg \mathcal{M} = \sum_x \text{Länge } \mathcal{M}_x / (\mathcal{O}_{X,x} s_{1,x} + \ldots + \mathcal{O}_{X,x} s_{r,x})$$

wobei x alle abgeschlossenen Punkte von X durchläuft.

Es sei $e_1, \ldots, e_r$ eine Basis des freien $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls $\mathcal{M}_x$. Dann kann man schreiben:

$$s_{i,x} = \sum_{j=1}^{r} a_{ji} e_i, \quad \text{wo } a_{ji} \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Man beweise, dass

$$\text{Länge } \mathcal{M}_x / (\mathcal{O}_{X,x} s_{1,x} + \ldots + \mathcal{O}_{X,x} s_{r,x}) = \operatorname{ord}_x \det(a_{ji}).$$

(Hinweis: Man benutze den Elementarteilersatz.)