Algebraische Geometrie II, Übung 5

1) Es sei A ein Ring. Es sei $K^{\cdot}$ ein Komplex von A-Moduln. Es sei M ein A-Modul. Wir setzen

$$K_M^i = K^i \otimes_A M, \quad I_M^{i+1} = \operatorname{Im}(K_M^i \to K_M^{i+1}).$$

Man zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus gibt:

$$K^{i+1}/I^{i+1} \otimes_A M \cong K_M^{i+1}/I_M^{i+1}.$$

2) Es sei A ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ nilpotent ist. Es sei M ein flacher A-Modul. Man beweise, dass M ein freier Modul ist.

Hinweis: Man betrachte eine Familie von Elementen $\{m_\lambda \in M\}_{\lambda \in \Lambda}$ deren Restklassen eine Bases des $A/\mathfrak{m}$-Vektorraumes $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Man erhält eine Surjektion

$$A^{(\Lambda)} \to M.$$

Der Kern sei K. Man tensoriere die exakte Folge

$$0 \to K \to A^{(\Lambda)} \to M \to 0.$$

mit $\otimes_A A/\mathfrak{m}$.

3) Es sei A ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ nilpotent ist. Es sei $f : X \to S = \operatorname{Spec} A$ ein separierter und quasikompakter Morphismus. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasicohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, der f-flach ist. Es sei $p \in \mathbb{N}$, so dass

$$R^p f_*(\mathcal{L} \otimes_A A/\mathfrak{m}) = 0.$$

Man folgere, dass für jeden quasikohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{M}$

$$R^p f_*(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}) = 0.$$

und dass

$$R^{p-1} f_* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} \to R^{p-1} f_*(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}).$$

ein Isomorphismus ist.

4) Es sei R ein Ring und I ein R-Modul. Man beweise, dass I genau dann injektiv ist, wenn für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ und jede Abbildung $\phi : \mathfrak{a} \to I$ eine Abbildung $\psi : R \to I$ existiert, die ϕ fortsetzt.

Hinweis: Es seien $M \subset N$ zwei R-Moduln und $n \in N$, so dass $N = Rn + M$. Man konstruiere eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{a} \to R \oplus M \to N \to 0$$