Algebraische Geometrie III, Übung 2

1) Es sei $T : X \dashrightarrow Y$ eine eigentliche birationale Abbildung. Es sei $A \subset X$ eine irreduzible abgeschlossene Menge mit dem allgemeinen Punkt ρ. Man zeige, dass im allgemeinen $\overline{T[\rho]} \neq T[A]$. Die Menge $\overline{T[\rho]}$ nennt man die eigentliche Transformierte von A.

Es sei $S : Y \dashrightarrow Z$ eine weitere eigentliche birationale Abbildung. Es sei $M \subset X$ Welche Beziehung gibt es zwischen $S[T[M]]$ und $S \circ T[M]$?

2) Es seien X und Y topologische Räume. Es sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $P \in Y$ ein abgeschlossener Punkt.

Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so dass $E = f^{-1}(P)$ und so dass $f : X \setminus E \to Y \setminus \{P\}$ ein Homöomorphismus ist. Man beweise, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) f ist abgeschlossen.

(2) Die Topologie auf Y ist die von X induzierte Quotiententopologie.

3) Es sei X ein Schema. Es sei $E \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so dass $H^0(E, \mathcal{O}_E)$ ein Körper ist.

Wir betrachten die Menge $Y = (X \setminus E) \cup \{P\}$. Es sei $f : X \to Y$ die offensichtliche Abbildung, so dass $f^{-1}(P) = E$. Wir versehen Y mit der Quotiententopologie. Wir setzen $\mathcal{O}_Y = f_*\mathcal{O}_X$. Man beweise, dass $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein lokal geringter Raum ist.

Man sagt, dass man $E \subset X$ zusammenblasen kann, wenn der lokal geringte Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schema ist. Das ist sinnvoll, weil der Funktor, der einem Schema den lokal geringten Raum zuordnet, volltreu ist.

4) Es sei Y ein Schema und $P \in Y$ ein abgeschlossener Punkt. Es sei $f : X \to Y$ die Aufblasung im maximalen Ideal zu P. Man beweise, dass f eine Zusammenblasung ist.