Bielefeld, den 27.10.11

Übungen 3

1) Es sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Man beweise, dass für grosse natürliche Zahlen m die Ungleichung
$$a^m < m!$$
gilt.

2) Es seien $\nu_1 = (p_1/q_1)$ und $\nu_2 = (p_2/q_2)$ rationale Zahlen. Hier sind p_1, p_2, q_1, q_2 ganze Zahlen und $q_1 > 0$ und $q_2 > 0$.

Es sei $\nu_1 < \nu_2$. Man beweise, dass
$$2^{\nu_1} < 2^{\nu_2}.$$

(Man benutze: Wenn a und b positive Zahlen sind und m eine natürliche Zahl, so gilt $a < b$ genau dann wenn $a^m < b^m$.)

3) Eine Funktion $h(t)$ sei für alle reellen Zahlen $t \geq a$ definiert. Man nennt $h(t)$ streng monoton steigend, wenn für alle reellen Zahlen t_1, t_2, so dass $a \leq t_1 < t_2$ gilt dass
$$h(t_1) < h(t_2). \tag{1}$$

Wenn umgekehrt t_1 und t_2 zwei reelle Zahlen $\geq a$ sind und (1) gilt, so folgt $t_1 < t_2$. (wieso?). Wenn es zu jeder Zahl $s \geq h(a)$ eine Zahl $t \geq a$ gibt, so dass $h(t) = s$, so nennt man h stetig. (Anschaulich macht der Graph von h dann keine Sprünge.)

Geben Sie Beispiele für streng monoton wachsende stetige Funktionen. Im folgenden soll h eine solche Funktion sein.

Es seien $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq 0$ zwei Funktionen, die für große Zahlen x definiert sind. Dann sind die Funktionen von t:
$$f_1(t) = f(h(t)), \quad \text{und} \quad g_1(t) = g(h(t))$$

Für große t definiert.

Man beweise: Wenn $g_1(t) = \mathbf{o}(f_1(t))$ so gilt auch $g(x) = \mathbf{o}(f(x))$.

Man nennt das die Methode der Substitution. Sie ist auch geeignet, um andere Behauptungen über $f(x)$ und $g(x)$ zu beweisen.

4) Es seien $\nu_n > \nu_{n-1} > \ldots > \nu_1$ rationale Zahlen. Es seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen und es sei $a_n > 0$. Man beweise mit der Methode des Substitution, dass die folgende Funktion

$$f(x) = a_n x^{\nu_n} + a_{n-1} x^{\nu_{n-1}} + \ldots + a_1 x^{\nu_1} + a_0$$

für große Zahlen x nur positive Werte annimmt.