Bielefeld, den 2.11.11

Übungen 4

1) Es sei b eine reelle Zahl, so dass $0 < b < 1$ und es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Man beweise, dass

$$b^x = \mathbf{o}(x^{-n}).$$

2) Es sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie die Ungleichung:

$$(1-x)^2 > 1 - 2x.$$

Allgemeiner gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 2$, dass

$$(1-x)^n > 1 - nx. \tag{1}$$

Beweisen Sie das für $n = 3, 4, 5, 6$.

3) Zeigen Sie für jede Zahl $u > 0$ die folgende Gleichung

$$\left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\left(1 + \frac{1}{u}\right) = 1.$$

Beweisen Sie die Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(Hinweis: Multiplizieren Sie die Ungleichung mit $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ und benutzen Sie die Ungleichung (1).)

4) Es seien $c > 0$ und $b > 0$ zwei reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl ℓ gilt:

$$\log_c b^\ell = \ell \log_c b.$$

Beweisen Sie für jede reelle Zahl $z > 0$, dass

$$(\log_b z)(\log_c b) = \log_c z.$$