Bielefeld, den 9.11.11

Übungen 5

1) Die hyperbolischen Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind wie folgt definiert:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Beweisen Sie die Identität:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

2) Man beweise, dass die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

für jede reelle Zahl x konvergiert.

(Hinweis: Benutzen Sie Übungen 3 Aufgabe 1.)

3) Es sei $x \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir wählen die natürliche Zahl n so, dass $n \leq x \leq n+1$.

Beweisen Sie die Ungleichungen

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

4) Es seien a_n für $n \in \mathbb{N}$ und b_n für $n \in \mathbb{N}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Wir nehmen an dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

wobei a und b reelle Zahlen sind. Dann gilt die folgende Gleichung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Wir wollen das als bekannt voraussetzen. Folgern Sie die folgenden Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Hier ist e die Eulersche Zahl.

Hinweis: In der Vorlesung haben wir bewiesen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bemerkung: Nach den Ungleichungen (1) sollte Ihnen intuttiv klar sein, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Zahl

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

um weniger als ϵ von e abweicht, wenn x nur genügend groß ist.