

Übungen 6

1) Es seien x und y zwei verschiedene reelle Zahlen. Man beweise die Gleichung:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-2}x + y^{n-1}.$$

Präziser kann man die rechte Seite der Gleichung so schreiben:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i.$$

2) Man betrachte die folgenden Reihen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} x^n. \end{aligned}$$

Man finde für jede der Reihen eine möglichst große Zahl r , so dass die Reihe für $|x| < r$ konvergiert.

3) Wir betrachten ein Polynom

$$f(x) = a_{m+1}x^{m+1} + a_{m+2}x^{m+2} + \dots + a_{m+r}x^{m+r}.$$

Hier sind m und r natürliche Zahlen und $a_i \in \mathbb{R}$.

Wir wählen $x_0 = 0$. Man beweise, dass

$$f(x) = \mathbf{o}_{x_0}(|x|^m)$$

Bemerkung: Dasgleiche gilt auch wenn $f(x)$ eine Potenzreihe ist

$$f(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n$$

und wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, so dass f für $|x| < r$ konvergiert.

4) Es sei $x_0 = 0$. Man beweise, dass

$$\frac{d \cos x}{dx^2} \Big|_{x_0} = -\frac{1}{2} + \mathbf{o}_{x_0}(1).$$

Hinweis: Man benutze die Potenzreihe für $\cos x$.