Geometrie, Übung 1

1) Der Satz über implizite lineare Funktionen. Es sei $m > n$. Es sei $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen voraus, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Man beweise, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcc} \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\} & \to & \mathbb{R}^{m-n} \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \mapsto & (x_{n+1}, \dots, x_m) \end{array}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

2) Man leite aus der geometrischen Definition der Zykloide ihre Parameterdarstellung $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ her.

Es sei g die Gerade mit dem Anstieg t durch den Punkt $(-1, 0)$. Man berechne die Schnittpunkte von g mit dem Einheitskreis als Funktion von t.

3) Man beweise, dass in dem Text über implizite Funktionen die Determinante der Jacobischen Matrix von $\tilde{\phi}$ im Punkt ξ ungleich 0 ist.

4) Es sei $f(x, y)$ eine C^∞-Funktion, die auf einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ definiert sei. In jedem Punkt $\xi \in V$ möge eine der beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)$$

nicht Null sein.

Man beweise, dass die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ (x, y) \in V,\ f(x, y) = 0\}$$

ein glatte Kurve ist.

Abgabetermin: Donnerstag, den 16.4.2015