Geomtrie, Übungen 10

1) Wir betrachten den Zylinder mit der Parameterdarstellung:

$$\alpha(u,v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Man berechne die erste und zweite Fundamentalform in einem Punkt (u,v).

Man finde alle Geodätischen durch einen Punkt $\alpha(u_0,v_0)$ auf diesem Zylinder.

2) Es sei eine Fläche M durch die Gleichung

$$z = f(x,y)$$

gegeben. Wir bezeichen mit f_x bzw. f_y die partielle Ableitung nach x bzw. y. Man beweise, dass die zweite Fundamentalform wie folgt aussieht:

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Man betrachte die Fläche $z = x^2 + y^3$. Was sind die Schnittkrümmungen nach Euler im Punkt $(1,1,2)$?

3) Es seien $g_i(x,y,z)$, $i = 1,2,3$ drei C^∞-Funktionen, die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ definiert sind. Wir betrachten die Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^3$, so dass $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z))$. Für jeden Punkt $P = (x_0,y_0,z_0)$ gibt es genau eine lineare Abbildung

$$T_P g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

mit folgender Eigenschaft. Es sei $\gamma : (a,b) \to U$ eine C^∞-Funktionen, so dass $\gamma(t_0) = P$. Es sei $\delta = \alpha \circ \gamma$. Dann gilt

$$T_P g(\gamma'(t_0)) = \delta'(t_0).$$

Man finde die Matrix der linearen Abbildung $T_P g$.

4) Es sei $\gamma : (0,\ell) \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve, die im Bogenmass parametrisiert ist und so dass $\gamma_2(s) \geq 0$. Man finde die 2. Fundamentalform der Fläche, die durch Drehung um die x-Achse entsteht. Man beweise, dass γ eine Geodätische auf dieser Fläche ist.