Geometrie, Übung 3

1) Es sei $F(x, y, z)$ eine reelwertige Funktion auf dem $\mathbb{R}^3$. Dann haben wir die Differentialform definiert:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

Man betrachte die folgende Differentialform (sie beschreibt das Gravitationsfeld eines Massepunktes)

$$\omega = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(xdx + ydy + zdz).$$

Man finde eine Funktion F, so dass $dF = \omega$.

2) Es ist $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + (y-2)^2 = 1, \}$ ein Kreis. Man berechne das Doppelintegral:

$$2\pi \int\int_H ydxdy$$

(Man kann der Greenschen Satz benutzen.)

3) Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gleich πab ist. Man benutze dies um zu zeigen, dass dass Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

gleich $(4/3)\pi abc$ ist.

4) Man berechne das Integral über die Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ von der folgenden Differentialform in der Ebene:

$$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy + \frac{1}{x^2 + y^2} dx$$

(Die Nummer 4 vom letzten Blatt war leider falsch gestellt.)

Abgabetermin: Donnerstag, den 7.5.2015