Geometrie, Übung 4

1) Es sei C eine Kurve. Es sei $\gamma : (a,b) \to C$ eine Parametrisierung nach dem Bogenmaß, d.h. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$. Wir haben die folgenden Größen definiert:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}(s) := \dot{\gamma}(s), && \kappa(s) := |\dot{\mathbf{t}}(s)|, \quad \kappa(s)\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \\ &\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), && \dot{\mathbf{b}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

(Man mache sich klar, warum diese Definitionen sinnvoll sind.) Es sei $\gamma(s_0) = P \in C$ ein Punkt. Dann schreiben wir etwas nachlässig $\mathbf{t}(P) = \mathbf{t}(s_0)$ usw..

Es sei $\delta(t)$, $t \in (c,d)$ eine zweite Parametrisierung nach dem Bogenmaß, wo bei $\delta(t_0) = P$. Man beweise, dass es eine Konstante $h \in \mathbb{R}$ gibt, so dass in einer Umgebung von t_0 gilt:

$$\delta(t) = \gamma(\pm t + h).$$

Man zeige wie sich die Größen $\mathbf{t}(P), \mathbf{n}(P), \mathbf{b}(P), \kappa(P), \tau(P)$ verändern, wenn man sie mit δ anstelle von γ berechnet.

2) Es seien $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ usw. Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Dann lautet die definierende Gleichung für das Vektorprodukt:

$$< \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) >= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Man folgere daraus die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \\ &(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) \times w = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \times w) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 \times w), \end{aligned}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3) Es seien $\mathbf{v} \neq 0$ und $\mathbf{w} \neq 0$ zwei Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen, d.h. $< \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} >= 0$. Es sei $\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Man beweise, dass

$$\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{w}|^2} \mathbf{w}.$$

4) Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine Matrix. Man nennt A eine Drehmatrix, wenn $\det A = 1$ und wenn für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$< (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) >=< \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > .$$

Es sei A eine Drehmatrix. Dann gilt für alle Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, dass

$$A\mathbf{v} \times A\mathbf{w} = A(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 14.5.2015