Geometrie, Übung 5

1) Man betrachte die folgende Raumkurve:

$$\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, -\frac{3}{5}\cos t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Man berechne für diese Kurve die Krümmung $\kappa(t)$, die Torsion $\tau(t)$ und die Vektoren

$$\mathbf{t}(t), \quad \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{b}(t).$$

Wie sieht diese Kurve aus?

2) Es sei $\delta : (a, b) \to C$ eine Raumkurve. In der Vorlesung wurde die folgende Formel für die Krümmung angegeben:

$$\kappa(t) = \frac{|\delta'(t) \times \delta''(t)|}{|\delta'(t)|^3}.$$

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Wir betrachten die ebene Kurve $y = f(x)$.

Man beweise die folgende Formel für die Krümmung dieser Kurve in einem Punkt (x_0, y_0):

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Es sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, wo $a < t < b$ eine ebene Kurve, so dass $\gamma(t) \neq 0$.

Es sei $t_0 \in (a, b)$ und es sei α_0 der Winkel zwischen den Vektoren

$$(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \quad \text{und} \quad (1, 0).$$

Man beweise, dass es eindeutig bestimmte reelle Funktionen $\alpha(t)$ und $\rho(t)$ gibt, die in einer Umgebung von t_0 definiert sind, und so dass

$$\gamma_1(t) = \rho(t)\cos\alpha(t), \quad \gamma_2(t) = \rho(t)\sin\alpha(t)$$

und $\alpha(t_0) = \alpha_0$.

Hinweis: Man betrachte die folgende Funktion $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \phi) \to (r\cos\phi, r\sin\phi)$ (Polarkoordinaten). Man wende den Satz über implizite Funktionen an.

Man erkläre, warum die Funktionen $\alpha(t)$ und $\rho(t)$ so gar auf dem ganzen Interval (a, b) definiert sind.

4) Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gleich πab ist. Man benutze dies um zu zeigen, dass dass Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gleich $(4/3)\pi abc$ ist.

Abgabetermin: Donnerstag, den 21.5.2015