Geometrie, Übung 6

1) Es sei $\gamma : (a,b) \to C$ eine Parametrisierung der Kurve C. Es seien $t_0, t_1 \in (a,b)$ und $t_0 \leq t_1$. Wir schreiben $P = \gamma(t_0)$ und $Q = \gamma(t_1)$ für die entsprechenden Punkte auf C. Dann ist die Länge des Bogens von C zwischen P und Q nach Definition:

$$\text{Bogen}\, PQ = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt.$$

Es sei $\tau : [c,d] \to C$ eine injektive Abbildung, die stetig differenzierbar ist, und deren Bild in $\gamma((a,b))$ liegt.

Man beweise, dass die Länge des Bogens zwischen den Punkten $\tau(c)$ und $\tau(d)$ der Wert des folgenden Integrals ist

$$\int_c^d |\tau'(u)| du.$$

2) Es sei Q ein Quadrat im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,a)$. $(a,0)$, (a,a). Es sei g_ϕ die Gerade, welche entsteht, wenn man die y-Achse um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Drehsinn dreht.

Wie groß ist die Länge $b(\phi)$ der Projektion des Qudrats auf die Gerade g_ϕ? Man berechne das Integral

$$\int_0^\pi b(\phi) d\phi.$$

3) Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a. Die 3 Geraden AB, BC, CA teilen die Ebene in 7 Zusammenhangskomponenten. In der Abbildung haben wir einige davon bezeichnet: $G_A, G_B, G_C, I_A, I_B, I_C$. Die Kurve K sei wie folgt definiert:

In I_A, I_B, I_C sei die Kurve K der Kreisbogen mit einem festen Radius r um jeweils die Punkte A, B, C. In G_A, G_B, G_C sei K der Kreisbogen mit dem Radius $a + r$ um jeweils die Punkte A, B, C.

Man beweise, dass die orthogonale Projektion dieser Kurve auf eine beliebige Gerade g der Ebene ein Strecke der Länge $a + 2r$ ist.

Wie lang ist die Kurve K? (Man kann einen Satz der Vorlesung benutzen.)

4) Es sei $g_\phi \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade, welche mit der x-Achse den Winkel ϕ bildet. Es sei v ein Vektor der Ebene $\mathbb{R}^2$. Es sei $\ell(\phi)$ die Länge der Projektion von v auf die Gerade g_ϕ.

Man beweise, dass für $\phi_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\phi_0}^{\phi_0+\pi} \ell(\phi) d\phi = \int_0^\pi \ell(\phi) d\phi.$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 28.5.2015