Geometrie, Übung 7

1) Es sei

$$U = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \phi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Es sei $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\alpha(\phi, \psi) = (\cos\phi \cdot \cos\psi,\ \sin\phi \cdot \cos\psi,\ \sin\psi).$$

Beweisen Sie, dass das Bild der Abbildung α eine Fläche M ist und dass α eine Parametrisierung von M ist.

Finden Sie den Tangentialraum von M in einem Punkt $\alpha(\phi_0, \psi_0)$, wo $(\phi_0, \psi_0) \in U$.

2) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es sei $C \subset \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte der Form $(x, f(x), 0)$, wo $x \in (a, b)$. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man erhält, wenn man C um die x-Achse rotieren läßt.

Man beweise, dass M eine Fläche ist. Man finde den Tangentialraum $T_P(M)$ in einem Punkt $(x_0, f(x_0), 0)$.

3) Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Man beweise die Formel

$$\langle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}\rangle & \langle\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\rangle \\ \langle\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}\rangle & \langle\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}\rangle \end{pmatrix}.$$

4) Es sei $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung einer Kurve. Es sei $\delta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine C^∞-Funktion, so dass die Vektoren $\gamma'(t)$ und $\delta(t)$ für alle $t \in (a, b)$ linear unabhängig sind. Es sei $a < c < d < b$.

Man beweise, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Funktion

$$\alpha(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t) \in \mathbb{R}^3$$

für $c < t < d$ und $-\epsilon < u < \epsilon$ die Parametrisierung einer Fläche ist.

(Das nennt man eine Regelfläche.)

Abgabetermin: Donnerstag, den 4.6.2015