Geomtrie, Übungen 8

1) Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist. Es sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}.$$

Man zeige, dass M eine Fläche ist, indem man eine Parametrisierung von M findet. Man berechne die Fundamentalform dieser Parametrisierung.

2) Es sei $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$, wo $0 \leq s \leq \ell$ die Parmetrisierung einer Kurve C in der x-y-Ebene einer Kurve nach dem Bogenmaß. Es sei $\gamma_2(s) > 0$.

Wir setzen voraus, dass $\gamma_1'(s)$ nur endlich viele Nullstellen im Intervall $[0, \ell]$ hat. Beweisen Sie, dass die Menge M aller Punkte, die durch Rotation von γ um die x-Achse entstehen eine Fläche ist und dass der Flächeninhalt

$$2\pi \int_0^\ell \gamma_2(s) ds \tag{1}$$

ist.

Die Menge C sei der Graph einer C^∞-Funktion $y = f(x)$, $a \leq b$. Dann ist die Bogenlänge von C im Intervall $[a, x]$

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(u))^2} du.$$

Man schreibe mit dieser Variablentransformation (1) als ein Integral in der Variablen x.

2) Ein Torus T entsteht, wenn man einen Kreis um eine Gerade, die in der Kreisebene liegt und den Kreis nicht berührt, rotieren lässt. Es sei r der Radius des Kreises und es sei d der Abstand seines Mittelpunktes von der Geraden. Wie groß ist die Oberfläche von T und wie groß ist das von T umschlossene Volumen?

3) Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte (u, v) mit $u > 0$. Man beweise, dass $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$, wo

$$\alpha(u, v) = (uv, v, u^2)$$

die Parametrisierung einer Fläche M ist.

Es sei $P = \alpha(u_0, v_0)$. Man finde eine Basis des Tangentialraumes $T_P(M)$. Was ist die Tangentialebene im Punkt P. Man berechne im Punkt P die Matrix

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Man betrachte auf der Fläche M die Kurven $\rho(t) = \alpha(t, 1)$ und $\sigma(t) = \alpha(1, t)$. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Kurven auf M?