Geomtrie, Übungen 9

1) Es sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

eine Sphäre mit dem Mittelpunkt O. Es sei $\gamma(s)$ ein Kreis auf S mit dem Mittelpunkt O, der im Bogenmaß parametrisiert ist. Man beweise, dass $\gamma''(s)$ orthogonal zum Tangentialraum an S im Punkt $\gamma(s)$ ist. Man folgere, dass γ eine Geodätische auf S ist. Wieso bekommt man so alle Geodätischen auf S?

2) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 1 berechne man die 2.Fundamentalform auf dem Tangentialraum an einen Punkt von S.

3) Man löse die geodätischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(E\gamma_1' + F\gamma_2') &= \tfrac{1}{2}(E_u(\gamma_1')^2 + 2F_u\gamma_1'\gamma_2' + G_u(\gamma_2')^2) \\
\tfrac{d}{dt}(F\gamma_1' + G\gamma_2') &= \tfrac{1}{2}(E_v(\gamma_1')^2 + 2F_v\gamma_1'\gamma_2' + G_v(\gamma_2')^2)
\end{aligned}$$

nach γ_1'' und γ_2'' auf.

4) Es sei $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) > 0$ eine ebene Kurve. Wir parametrisieren sie im Bogenmaß:

$$x = g(u), \quad y = h(u), \qquad (g'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1.$$

Wenn wir diese Kurve um die x-Achse rotieren lassen erhalten wir eine Fäche mit der Parameterdarstellung:

$$(g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v).$$

Die 1.Fundamentalform ist:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (h(u))^2.$$

Wie vereinfachen sich die geodätischen Differentialgleichungen in diesem Fall?