Geometrie, Übung 9

1) Es sei K ein Körper. Es sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(K^2)$. Es seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$. Man beweise, dass

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = 1 - [P_1, P_3, P_2, P_4].$$

(Hinweis: Man betrachte die lineare Abbildung $K^2 \to K^2$, so dass $(u_0, u_1) \mapsto (u_0, u_0 - u_1)$. Was tut sie mit den Punkten $(0:1)$, $(1:0)$ und $(1:1)$ von $\mathbb{P}^1$?

2) Wir betrachten vier verschiedene Punkte von $\mathbb{P}^1$ mit den Koordinaten

$$P_1 = (0:1),\ P_2 = (1:x_2),\ P_3 = (1:x_3),\ P_4 = (1:x_4).$$

Man beweise, dass

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}.$$

3) Es seien ℓ und ℓ' zwei Geraden in der projektiven Ebene. Es sei g eine Gerade. Es seien $P \in \ell$ und $P' \in \ell'$ Punkte. Es sei $\pi : \ell \to g$ die Zentralprojektion mit dem Zentrum P' und $\rho : g \to \ell'$ die Zentralprojektion mit dem Zentrum P. Dann ist $\tau := \rho \circ \pi : \ell \to \ell'$ ein projektive Abbildung.

Wohin bildet τ den Schnittpunkt $\ell \cap \ell'$ ab?

Es seien $P, Q, R \in \ell$ drei verschiedene Punkte und $P', Q', R' \in \ell'$ drei verschiedene Punkte. Wie konstruiert man eine Gerade g, so dass so dass $\tau(P) = P'$, $\tau(Q) = Q'$ und $\tau(R) = R'$?

(Die Abbildung zeigt $\tau(Q) = Q'$.)

4) Es seien ℓ und ℓ' zwei Geraden. Es seien $P, Q, R \in \ell$ drei verschiedene Punkte und $P', Q', R' \in \ell'$ drei verschiedene Punkte.

Man beweise, dass die Schnittpunkte $PQ' \cap P'Q$, $PR' \cap P'R$ und $QR' \cap RQ'$ auf einer Geraden g liegen.

(Es gibt genau eine projektive Abbildung $\tau : \ell \to \ell'$, so dass $\tau(P) = P'$, $\tau(Q) = Q'$ und $\tau(R) = R'$. Diese Abbildung erhält man aus P, P' und g wie in Aufgabe 3).

Abgabetermin: Donnerstag, den 15.1.2015