Geometrie, Übung 11

1) Es sei ABC ein Dreieck. Zeichnen Sie über jeder Seite den Thaleskreis. Finden Sie die radikalen Achsen dieser drei Kreise. Folgern Sie, dass sich die Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden.

2) Es sei g eine Gerade mit den Punkten A, B, C, D. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal das Doppelverhältnis, in dem man g so auf eine Gerade h projeziert, dass A auf ∞, B auf 0 und C auf 1 abgebildet wird.

3) Es sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Es sei P ein Punkt außerhalb von K. Nach der Vorlesung findet man die Polare p zu P wie folgt. Man legt die beiden Tangenten von P an K. Dann ist p die Verbindungsgerade der Berührungspunkte.

Eine Sehne s durch P möge den Kreis K in A, B schneiden. Es sei Q der Schnittpunkt von p mit s. Man beweise, dass

$$[P, Q, A, B] = -1.$$

(Man beschränke sich mit Hilfe der Methode der stereographischen Projektion auf den Fall, wo Q der Mittelpunkt von K ist. Dann muss P der unendlich ferne Punkt sein.)

4) Es sei g eine Gerade mit drei verschiedenen Punkten A, B, C. Es sei g' eine weitere Gerade durch B. Es sei S ein Punkt außerhalb von g und g' und $\pi : g \cup \{\infty\} \to g' \cup \{\infty\}$ die zentrale Projektion von S. Es sei $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B = B'$ und $\pi(C) = C'$. Man beweise mit Menelaus, dass

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SA'}} \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}}$$

Es sei D ein weiterer Punkt auf g. Man erhält so einen weiteren Beweis für die Identität:

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'].$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 22.1.2015